400 ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

8-11 класи

Мандрівець
Тернопіль 1998

БІБЛІОТЕКА ЖУРНАЛУ "МАНДРІВЕЦЬ"
Серія *"МАТЕМАТИКА"*

ББК 22.151.я721

Упорядник:

Коваль Т. В. — методист з математики Чернівецького обласного науково-методичного інституту післядипломної освіти

400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи. / Упорядник Т. В. Коваль — Тернопіль: Мандрівець, 1998. — 80 с.

Цей посібник містить умови близько 400 олімпіадних задач з шкільного курсу математики та їх розв'язання. Відібрано найоригінальніші задачі з обласних та всеукраїнських олімпіад, які проводилися в останні роки.

Матеріал систематизовано, подано у логічній послідовності. Чіткий виклад полегшує сприймання, а розв'язання дають можливість здійснити самоконтроль.

Адресовано учням, абітурієнтам, вчителям, викладачам.

Головний редактор проекту Б. Фенюк
Технічний редактор А. Трут
Літературний редактор Т. Лагошняк
Комп'ютерний набір К. Гілінська
Комп'ютерне верстання А. Денис
Художник В. Поворозник
Відповідальний за випуск Є. Гнип

ISBN 966-7461-36-X

Видруковано в Україні

Підписано до друку 12.11.1998. Формат 60х84 1/16. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 4,65
Видавництво **"Мандрівець"**, свідоцтво про державну реєстрацію КВ №621
282001, м. Тернопіль, бул. Т. Шевченка, 1, к. 56
Тел. (0352) 22 06 20, тел./факс (0352) 22 33 05

Надруковано з готових діапозитивів у ТзОВ "Терно Граф",
м. Тернопіль, вул. Чубинського, 3

ЗАВДАННЯ

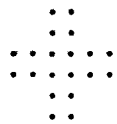
8 клас

1 (II). Довести, що якщо $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

2 (II). На автомобілі нові шини. Шина на задньому колесі витримує пробіг 16000 км, а на передньому – 24000 км. Який максимальний шлях можна здійснити на цих шинах?

3 (II). Що більше 127^{23} чи 513^{18}?

4 (II). Двадцять точок розташовані, як показано на малюнку. Скільки можна побудувати різних квадратів з вершинами у цих точках? Які 6 точок потрібно вилучити, щоб не можна було побудувати жодного квадрата з вершинами в точках, що залишились?



5 (II). Довести, що в рівнобедреному трикутнику сума відстаней з кожної точки основи до бічних сторін є величина стала, а саме: вона дорівнює висоті, опущеній на бічну сторону.

6 (II). Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x - \sqrt{x + 2}}$.

7 (II). Побудувати графік функції $y = \dfrac{3x^2}{x - |x|}$.

8 (II). З 11 кг свіжих грибів одержали 1 кг 250 г сухих грибів, які містять 12% води. Скільки відсотків води у свіжих грибах?

9 (II). Чи може сума цифр натурального числа, що є точним квадратом, дорівнювати 1993?

10 (II). Круг з радіусом R поділити пополам концентричним колом.

11 (II). У рівнобедрений трикутник з кутом 120^0 при вершині і бічною стороною a вписано коло. Знайти радіус кола.

12 (II). Дорога з пункту A в пункт B довжиною 11,5 км іде спочатку вгору, потімо рівниною і, нарешті, з гори. Пішохід на шлях від A до B затратив 2 год 54 хв, а на зворотний шлях – 3 год 6 хв. Швидкість його ходьби вгору була 3 км/год, на рівнині – 4 км/год, а з гори – 5 км/год. Скільки кілометрів складає та частина дороги, яка іде рівниною?

13 (II). На протилежних берегах річки одна проти одної ростуть дві пальми. Висота однієї з них 10 метрів, а іншої – 15 метрів, відстань між основами пальм дорівнює 25 метрів. На верхівці кожної пальми сидить птах. Раптово обидва птахи помічають рибу, яка виплила на поверхню річки між пальмами. Птахи кинулись до риби і досягли її одночасно. На якій відстані від основи більш високої пальми виплила риба?

14 (II). Розв'язати рівняння в цілих додатних числах:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}.$$

15 (II). Нехай P – периметр опуклого чотирикутника, S – сума довжин його діагоналей. Довести, що $S < P$.

16 (II). При яких цілих значеннях n дріб $\frac{n^2-n+3}{n+1}$ – число ціле?

17 (II). Знайти найменше значення виразу:

$$(2a-1)(2a+1)+3b(3b-4a).$$

18 (II). Горять дві свічки неоднакової довжини і різної товщини. Довша свічка повністю згорає за 3,5 год, а коротша – за 5 год. Через дві години одночасного горіння їхні довжини виявились рівними. У скільки разів одна свічка була коротшою від іншої?

19 (II). Сторони двох кутів (E і F) перетинаються у точках A, B, C, D. Відомо, що бісектриси цих кутів взаємно перпендикулярні. Довести, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

20 (II). Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою C і медіаною m, проведеною з вершини гострого кута.

21 (II). Довести, що різниця основ менша суми бічних сторін трапеції, а сума основ менша суми діагоналей трапеції.

22 (II). Для яких натуральних чисел n число n^2+5 ділиться на число $n+5$?

23 (II). Онук у 4,5 рази молодший від діда. Скільки років кожному з них, якщо їх вік записується одними і тими самими цифрами?

24 (II). Дано трикутник ABC. Бісектриса BB_1 ділить його на два рівнобедрені трикутники, причому $AB = BB_1 = B_1C$. Знайти кути трикутника.

25 (II). Автомобіль проїхав віддаль від міста A до міста B із швидкістю 40 км/год, а назад – із швидкістю 30 км/год. Яка середня швидкість автомобіля за весь рейс?

26 (II). Розв'язати арифметичний ребус, зображений на малюнку. Однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним – різні.

$$\begin{array}{r} \textit{с и н у с} \\ \textit{с и н у с} \\ \textit{к о с и н у с} \\ \hline \textit{т а н г е н с} \end{array}$$

27 (II). Побудувати графік $y = x|y|$.

28 (II). Катети прямокутного трикутника є коренями рівняння $2x^2 - 7x + 6 = 0$. Визначити довжину медіани, проведеної до більшого катета.

29 (II). Учитель перевірив роботи трьох учнів – Івана, Петра і Степана, але не взяв їх з собою. Учням він сказав: "Всі ви одержали різні позитивні оцінки. У Степана не 5, у Петра не 4, а у Івана, здається, 4". Далі виявилось,

що вчитель помилився і що лише одному учневі сказав правильно оцінку, а двом іншим – не правильно. Яку оцінку одержав за роботу кожний учень?

30 (II). a, b, c – цілі числа, $a + b + c$ ділиться на 6. Довести, що $a^5 + b^3 + c$ також ділиться на 6.

31 (II). Побудувати трикутник за серединами двох його сторін і основою висоти, проведеною до третьої сторони.

32 (II). Довести, що число

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

є натуральним.

33 (II). Заповнити клітки таблиці так, щоб числа в кожному рядку і кожному стовпці утворювали геометричну прогресію.

27			
		36	
	6		
			8

34 (II). Довести, що якщо всі коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ цілі непарні числа, то корені рівняння не є раціональними числами.

35 (II). На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок CM так, що $|CM| = |BC|$. Довести, що кут ABM – тупий.

36 (II). Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$, площа якого дорівнює S, лежить точка M. Побудуємо точки M_1, M_2, M_3, M_4, симетричні точці M відносно середин сторін даного чотирикутника, і з'єднаємо їх так, щоб чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ був опуклим. Обчислити площу чотирикутника $M_1M_2M_3M_4$.

37 (II). Дано 125 натуральних чисел попарно, не рівних між собою і менших 1984. Довести, що серед їх попарних різниць знайдуться не менше 5 однакових.

38 (III). Сума трьох тризначних чисел $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$ дорівнює 1998. Знайти усі трійки таких чисел.

39 (III). Чи буде число 11...155...56 (1998 одиниць та 1997 п'ятірок) квадратом цілого числа?

40 (III). Через точки дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Довести, що ці прямі перетинаються в одній точці.

41 (III). На дошці розміром 4×4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати лише один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утвориться квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто ходить першим, чи його суперник? Відповідь обґрунтувати.

42 (III). Нехай m і n – такі цілі числа, що $m^2 + 9mn + n^2$ ділиться на 11. Довести, що в цьому разі $m^2 - n^2$ ділиться на 11.

43 (III). Довести, що не існує таких дійсних чисел a і b, щоб одночасно виконувались дві рівності: $a = b^2 + 1, b = a^2 + 1$.

44 (III). Дано два кола T_1 і T_2, які перетинаються в двох точках A і B. Коло T_2 проходить через центр кола T_1. Дотична до кола T_2, проведена через точку B, перетинає коло T_1 в точці C (відмінній від B). Довести, що $AB = BC$.

45 (III). Дано множину з $2n$ додатних чисел, про які відомо: ці числа можна розбити на n пар так, що сума чисел в кожній парі буде одна і та сама; ці $2n$ чисел можна розбити на n пар (можливо, вже інших) так, що добуток чисел в кожній парі буде одним і тим самим. Довести, що серед чисел цієї множини не знайдеться трьох різних.

46 (III). У трикутнику ABC проведено висоту AH, O – центр описаного навколо цього трикутника кола. Довести, що $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

47 (III). Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ ціле.

48 (III). Довести, що для довільних дійсних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$.

49 (III). Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999999. Квиток з номером $abcdef$ вважається "щасливим", якщо $af + be + cd = 100$. Довести, що сума усіх "щасливих" квитків ділиться на 1001.

50 (III). Як можна відміряти 9 хв за допомогою пісочних годинників на 5 хв та на 7 хв?

51 (III). Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. Відомо, що $AB = CH$. Знайти величину кута ACB.

52 (III). Обчислити суму:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}, \text{ якщо } xyz = 1.$$

53 (III). Який найбільший спільний дільник є можливим для чисел $9m + 7n$ та $3m + 2n$, якщо числа m та n не мають спільних дільників, крім одиниці.

54 (III). У трикутнику ABC кут A більший за кут B. Довести, що довжина сторони BC більша за половину довжини сторони AB.

55 (III). У сільській початковій школі навчається всього 20 учнів. У будь-яких двох з них є спільний дід. Довести, що в одного з дідів у цій школі навчається не менше 14 онуків та онучок.

56 (III). Шахіст зіграв 40 партій в шахи й отримав у сумі 25 очок (за кожну перемогу давалось 1 очко, за нічию – 1/2 очка, за поразку – 0 очок). Знайти різницю між кількістю його перемог та кількістю його поразок.

57 (III). Знайти усі набори ненульових цифр a, b, c, для яких виконується рівність $a,b \times c = a + b + c$ (тут a, b означає число "a" – цілих і "b" – десятих).

58 (III). AE – бісектриса трикутника ABC. Точка D лежить на стороні AC таким чином, що $\angle DBC = \angle A + \angle C$. Довести, що DE – бісектриса кута BDC.

59 (III). На Марсі 2000 країн і для кожної їхньої четвірки принаймні одна країна з цієї четвірки ворогує з трьома іншими. Знайти найменшу можливу кількість країн на Марсі, що ворогують з усіма одразу.

60 (III). Знайти два числа, якщо їх сума 168, а спільний дільник 24.

61 (III). Довести, що дріб $\frac{n^4 - 3n^2 + 1}{n^4 - n^2 - 2n - 1}$ при натуральному $n > 2$ – правильний скоротний дріб.

62 (III). У трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці D. Через точку D проведено пряму до перетину зі стороною AC в точці E так, що кут CDE рівний куту BAC. Довести, що $BD = DE$.

63 (III). Побудувати трикутник ABC, якщо відомо положення його вершини B, а також двох прямих h і m, на одній з яких (h) лежить висота, що проведена з вершини A, на другій (m) – медіана, що проведена з вершини C.

64 (III). Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 4 частини, потім деякі з четвертинок знову розрізали на 4 частини і т. д. Коли підрахували, то виявилося, що загальна кількість аркушів – 1992. Довести, що підрахунок зроблено неправильно.

65 (III). У садку діда Панаса ростуть груші та яблуні таким чином, що для кожної яблуні знайдуться деякі дві груші на відстані рівно 10 метрів від неї. Чи може яблунь у садку бути більше, ніж груш?

66 (III). На дошці написано вираз $* n^8 * n^7 * n^6 * n^5 * n^4 * n^3 * n^2 * n$. Петро і Оксана грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі, за один хід дозволяється замінити одну * на знак + або –. Оксана прагне, щоб отриманий після восьми ходів вираз ділився на 6 для кожного натурального n. Петро намагається цьому завадити. Петро ходить перший. Довести, що Оксана може забезпечити собі перемогу незалежно від того, як ходить Петро.

67 (IV). Коефіцієнти a, b, c рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ за абсолютною величиною не перевищують числа 1980. Чи може це рівняння мати корінь, більший ніж 1981?

68 (IV). Довести, що два прямокутники з паралельними сторонами подібні тоді і тільки тоді, коли одна із діагоналей одного прямокутника паралельна або перпендикулярна одній із діагоналей іншого.

69 (IV). Довести, що множину чисел 1, 2, 3, ..., 1413, 1414 можна розбити на групи так, щоб сума чисел у кожній групі дорівнювала 1981.

70 (IV). Знайти довжину сторони найменшого квадрата, у який можна помістити без накладання три круги радіусами 1, $\sqrt{2}$, 2.

71 (IV). Всередині даного кута задано дві точки A і B. Побудувати паралелограм, у якого дві протилежні вершини збігаються з точками A і B, а дві інші – лежать на сторонах кута.

72 (IV). Чи можна розставити по колу цифри від 0 до 9 так, щоб сума будь-яких трьох цифр, що стоять поряд, не перевищувала: а) 14? б) 15?

73 (IV). В автомат кидають мідні монети на суму n копійок. Нехай a_n – кількість способів, якими це можна зробити (з урахуванням порядку слідування монет різної вартості). Довести, що останні цифри чисел a_n періодично повторюються.

74 (IV). Довести, що для будь-яких чисел p і q сума довжин відрізків осі Ox, на яких виконується нерівність $\left|x^2 + px + q\right| \le 2$, не перевищує 4.

9 клас

1 (III). Визначити останню цифру числа $43^{43} - 17^{17}$.

2 (III). Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2} = 0.$$

3 (III). З'ясувати графічним способом, скільки розв'язків має рівняння $[x] + \{x\} + 1 = x|x|$, де $[x]$ – ціла частина числа; $\{x\}$ – дробова частина числа.

4 (III). Вершини трикутника A, B, C з'єднано з точками A_1, B_1, C_1, які лежать на протилежних сторонах (не у вершинах). Чи можуть середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 лежати на одній прямій?

5 (III). Із квадратного листа паперу у клітинку, в якому ціла кількість клітинок, вирізали квадрат, у якому також ціла кількість клітинок, так, що залишилось 124 клітинки. Скільки клітинок було у першому листі паперу?

6 (III). Послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху.

При всіх $n \ge 1$ $a_{n+1} \ge a_n - \dfrac{1}{n^2}$. Довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

7 (III). Прямокутник з довжиною сторін m, n (m, n – натуральні числа) розбито на mn одиничних квадратів. Довести, що при $m \le n$ число всеможливих квадратів зі сторонами, паралельними сторонам прямокутника, вершини яких знаходяться у вершинах цих одиничних квадратів, рівне

$$mn + \frac{m(m-1)(3n-m-1)}{6}.$$

8 (III). Чи може "вершник" обійти куб $1979 \times 1979 \times 1979$, розбитий на одиничні кубики, побувавши в кожному із них рівно по одному разу, якщо у початковий момент він знаходився у центральному кубику (рівновіддаленому від граней куба)? Одним ходом "вершник" може перейти із кубика в один із 6 сусідніх, які мають з ним спільну грань.

9 (III). На площині дано трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ з площами S_1 і S_2 відповідно. Відомо, що кооодинати векторів $\overrightarrow{A_1B_1}$ і $\overrightarrow{A_2B_2}$ пропорційні з від'ємними коефіцієнтами пропорційності, те ж саме відомо про пари векторів $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{A_2C_2}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ і $\overrightarrow{B_2C_2}$ (з тим самим коефіцієнтом пропорційності). Знайти площу трикутника $A_3B_3C_3$, де A_3, B_3, C_3 – середини відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

10 (III). Розв'язати рівняння $(x-2)(x^3-1) = 6x^2 + x + 1$.

11 (III). На дошці записані чотири числа 1; 9; 9, 6. Далі, на кожному кроці дозволяється вибирати із написаних на дошці три довільні числа a, b, c та дописувати три числа $a(b+c)$, $b(a+c)$, $c(a+b)$ (всі числа, що були на дошці, залишаються). Чи можна після скінченної кількості таких кроків отримати число 1996?

12 (III). Знайти суму квадратів коренів рівняння:

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

13 (III). Знайти всі натуральні числа m, n, які задовільняють рівність $5n^2 = m! - n!$, тут ($m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

14 (III). Пряма розмальована в два кольори. Довести, що на ній знайдуться три точки A, B, C, розмальовані в один колір і такі, що точка B є серединою відрізка AC.

15 (III). Основи трапеції дорівнюють a і b. Знайти довжину відрізка, який з'єднує середини діагоналей трапеції.

16 (III). Довести, що число 11 ... 1 (1998 одиниць) ділиться на 37.

17 (III). Через точки дотику вписаного в трикутник кола провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Довести, що ці прямі перетинаються в одній точці.

18 (III). Дано смужку 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто розпочинає гру перший, чи його суперник?

19 (III). На координатній площині відмітили п'ять точок: $(-2; 3)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ та $\left(\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість із цих точок може належати графіку рівняння $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1$?

20 (III). З квадратним тричленом $ax^2 + bx + c$ дозволяється робити такі дії:

1) замінити в ньому x на $x - \lambda$, де λ – довільне дійсне число;

2) замінити його на тричлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$.

Чи можна за допомогою таких дій із тричлена $x^2 - 3x - 4$ одержати тричлен $x^2 - 2x - 5$?

21 (II). Провести до кола дотичну в даній точці, якщо центр кола недоступний.

22 (II). На площині намалювали випуклий п'ятикутник і відмітили середини його сторін. Після цього весь малюнок витерли, залишивши відмічені точки. Як відновити малюнок?

23 (II). Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}$.

24 (II). Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^2 - 3x}{|x-3|}$.

25 (II). Двоє грають у таку гру. Спочатку перший ставить шахового коня на довільну клітинку дошки 3×8, потім другий робить хід цим конем, потім хтось робить перший і т. д. Забороняється ставити коня на клітинку, на якій він побував раніше. Програє той, кому при своєму ході нікуди ходити. Хто виграє за правильної гри?

26 (II). Розв'язати у дійсних числах рівняння $(1 + 4x^2)(1 + 9y^2) = 24xy$.

27 (II). Обчисліть $(2268056 \cdot 4536111 \cdot 6804166 + 2268054 \cdot 4536109 \times \times 6804164) : (2268053^2 + 4536111^2)$.

28 (III). Довести, що не існує чотирьох різних додатних чисел a, b, c, d таких, що $a + b = c + d$ та $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

29 (III). Деяка комісія засідала 40 разів, кожного разу в засіданні брало участь 10 чоловік, і будь-які двоє членів комісії засідали спільно не більше одного разу. Довести, що до комісії входить не менше 60 чоловік.

30 (III). Знайти всі трійки l, m, n, для яких виконується рівність $l^2 + m^2 + n^2 - 2l + 4m - 6n = -11$.

31 (III). У трикутнику ABC $\angle ACB = 120^0$. Позначимо через H точку перетину висот трикутника, через O – центр описаного кола, через M – середину дуги ACB описаного кола. Довести, що $HM = MO$

32 (III). Нехай a, b, c, A, B, C – додатні числа такі, що рівняння $ax^2 - bx + c = 0$ та $Ax^2 - Bx + C = 0$ мають два різні дійсні корені. Довести, що для кожного числа t, яке лежить між двома коренями рівняння $ax^2 - bx + c = 0$, та T, яке лежить між двома коренями рівняння $Ax^2 - Bx + C = 0$, виконується нерівність

$$(at + AT)\left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T}\right) < \left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

33 (III). Розв'язати рівняння

$$2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1.$$

34 (III). Довести, що для довільного a, $1 < a < 2$, площа фігури, обмеженої графіками функцій $y = 1 - |x - 1|$ і $y = |2x - a|$, менша, ніж $\frac{1}{3}$.

35 (III). Дано цілі числа a, b, c такі, що $a^2 + b^2 + c^2$ ділиться на 6, $ab + bc + ac$ ділиться на 3. Довести, що $a^3 + b^3 + c^3$ ділиться на 6.

36 (III). У чотирикутник $ABCD$ вписано коло з центром у точці O. Через точки A, B, C і D перпендикулярно до OA, OB, OC і OD проведено прямі L_A, L_B, L_C, L_D відповідно. Прямі L_A і L_B перетинаються в точці K, L_B і L_C – в точці L, L_C і L_D – в точці M, L_D і L_A – в точці N.

а) Довести, що KM і LN перетинаються в точці O.

б) Нехай довжини OK, OL, OM рівні p, g і r відповідно. Знайти довжину ON.

37 (III). Шахівницю 8×8 покрито 32-ма плитками доміно (плитки не виходять за межі шахівниці, не перекривають одна одну і кожна накриває рівно дві клітинки). Плитка називається горизонтальною, коли її довша сторона паралельна горизонтальній стороні дошки. Горизонтальна плитка називається чорно-білою, якщо ліва з двох накритих клітинок чорна, і біло-

чорною – в іншому випадку. Довести, що кількість чорно-білих горизонтальних плиток покриття рівна кількості біло-чорних.

38 (IV). Відомо, що для всіх натуральних чисел k, число $m^{2k} + n^{2k}$ ділиться на 179 (m та n деякі цілі числа). Довести, що $m^{1995} + n^{1995}$ також ділиться на 179.

39 (IV). В олімпіаді бере участь 100 школярів. Відомо, що в довільній групі з 99 школярів знайдеться учень, знайомий з усіма членами цієї групи. З'ясувати, чи обов'язково знайдеться учень, знайомий з усіма учасниками олімпіади?

40 (IV). У трикутнику ABC кут при вершині B дорівнює 120^0. Відомо, що $AB > BC$ та M – середина сторони AC. Позначимо через P середину ламаної ABC та через Q – точку перетину прямих BC та PM. Знайти величину кута PQB.

41 (IV). При якому найменшому натуральному n знайдеться таке натуральне число $m < n$, що в десятковому записі дробу $\frac{m}{n}$ зустрінеться фрагмент 0,...1995... ?

42 (III). Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy + x + y = 80; \\ yz + y + z = 80; \\ zx + z + x = 80. \end{cases}$$

43 (III). Чи можна занумерувати ребра куба натуральними числами від 1 до 12, використовуючи кожне число лише один раз, так, щоб суми номерів ребер, які сходяться в кожній вершині, були однаковими?

44 (III). Довести, що не існує натуральних чисел m і n, які задовільняють рівність $\sqrt{m} + \sqrt{n} = 1994$.

45 (III). Знайти всі функції f: $R \to R$, для яких при будь-яких x, y виконується рівність $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

46 (III). Нехай коло T описане навколо трикутника ABC, пряма l дотикається T в точці A. На стороні AB позначено точку D, на стороні AC – точку E так, що $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см і пряма DE паралельна до прямої l. Знайти довжину відрізка BD.

47 (II). При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (1 - a)x - 2a = 0$ дорівнює 9?

48 (II). На площині 10 точок. Скільки існує відрізків, що сполучають ці точки?

49 (II). Розв'язати у дійсних числах рівняння $(1 + 4x^2)(1 + 9y^2) = 24xy$.

50 (II). Довести, що різниця основ менша суми бічних сторін трапеції, а сума основ менша суми діагоналей трапеції.

51 (II). Побудувати графік функції $y = x|x| + 1$.

52 (II). Для яких натуральних чисел n число $n^2 + 5$ ділиться на $n + 5$?

53 (II). Точка M поділяє сторону AD прямокутника $ABCD$ у відношенні $1 : 2$, причому $MB = MD$. Знайти величину кута між діагоналями цього прямокутника.

54 (II). Основи трапеції мають довжини 3 см і 15 см. Чи може радіус кола, вписаного в трапецію, мати довжину 4 см?

55 (II). Нехай a і b – цілі числа. Довести, що якщо $a^2 + 9ab + b^2$ ділиться на 11, то і $a^2 - b^2$ ділиться на 11.

56 (II). У простому двоцифровому числі цифра одиниць на 2 більше цифри десятків. Якщо до цього числа додати 9, то одержана сума буде більшою 50, але меншою 97. Знайти ці числа.

57 (II). Побудувати графік рівняння $|x|-|y|=4$.

58 (II). a, b, c, d – сторони опуклого чотирикутника (у будь-якому порядку), S – його площа. Довести, що $S \le \frac{ab+cd}{2}$.

59 (III). Довести, що якщо в десятковому записі числа $\frac{1}{99..9^2}$ зустрічається 20 дев'яток, записаних підряд, то така сама послідовність з 19 дев'яток є в записі числа $\frac{1}{\underbrace{1249992}_{1984}}$.

60 (III). Довести, що якщо довжини сторін трикутника утворюють геометричну прогресію, а висоти – арифметичну, то трикутник рівносторонній.

61 (III). Довести, що якщо всі вершини центрально симетричного многокутника з центром в початку координат мають цілі координати, то площа цього многокутника є цілою.

62 (III). Правильний шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежить у шестикутнику $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ так, що $A_1 \in [B_1B_2]$, $A_2 \in [B_2B_3]$, .., $A_6 \in [B_6B_1]$. Довести, що $S_{B_1B_2\ldots B_6} \le \frac{3}{2} S_{A_1A_2\ldots A_6}$.

63 (III). Чи є число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ раціональним?

64 (IV). Двоє гравців по черзі ставлять на клітинки шахової дошки розміром 25×25 фішки, один – білого, а інший – чорного кольору. Кожна нова фішка ставиться на вільну клітинку, забороняється лише ставити фішку на таку клітинку, для якої на усіх сусідніх із нею клітинках уже стоять фішки цього самого кольору (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Програє той, хто не може зробити свій черговий хід. Хто виграє за правильної гри – той, хто починає гру, чи його суперник?

65 (IV). Знайти всі прості числа $p \le 1000$, для яких $2p + 1$ буде степенем натурального числа (тобто буде виконуватися рівність $2p + 1 = m^n$, де m і n – натуральні і $n \ge 2$).

66 (IV). Чи можна правильний 1992-кутник розрізати на паралелограми?

67 (IV). Перевірити, що коло $x^2 + 2x + y^2 = 1992$ проходить через точку A (42; 12) і довести, що це коло містить безліч точок B (x; y), обидві координати x і y яких є раціональними числами.

68 (IV). Іван зробив з дроту по одній моделі кожного трикутника, сторони якого вимірюються цілими числами сантиметрів, а периметр дорівнює 1993 см. Петро зробив так само для трикутників з периметром 1996 см. У кого вийшло більше моделей?

69 (IV). Нехай a, b, c – додатні дійсні числа, причому $\sqrt{a}+1 \ge b$, $c > 1$. Довести, що $ac + \frac{c}{c-1} \ge b$.

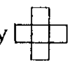
70 (IV). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC ділить навпіл відрізок, що сполучає середини сторін AB і CD. Довести, що вона ділить навпіл і діагональ BD.

71 (IV). Скільки розв'язків у натуральних числах має рівняння

$$x(x+1) = 2y^2?$$

72 (IV). Знайти всі натуральні n, при яких $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ є простим (тут $[x]$ – найбільше ціле число, що не перевищує x).

73 (IV). Два кола C_1 і C_2 дотикаються зовнішнім чином в точці M. Прямі l_1 і l_2 дотикаються кіл C_1 і C_2 в точках A_1 і A_2 відповідно і перетинаються в точці P. Точка M лежить всередині кута A_1PA_2. Довести, що центр кола, описаного навколо трикутника A_1MA_2, лежить на колі, описаному навколо трикутника A_1PA_2.

74 (IV). З прямокутної дошки 1995×1997 клітинок випиляли 330000 хрестів вигляду . Чи завжди після цього можливо випиляти ще а) 1000; б) 2000 хрестів?

75 (IV). Довести, що для довільних додатних дійсних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

76 (IV). На координатній площині намальовано три параболи $y=x^2+p_ix+q_i$ ($1 \le i \le 3$). Вони перетинають вісь абсцис відповідно в точках M_1 та M_2, M_2 та M_3, M_3 та M_4. Знайти коефіцієнти параболи $y = x^2 + px + q$, що проходить через точки M_1 та M_2.

77 (IV). На площині намальовано два кола з центром у точці O. Знайти геометричне місце точок, що є серединами відрізків, один кінець яких належить першому колу, а інший належить другому колу.

78 (IV). Знайти всі натуральні числа $n > 1995$, для яких виконується рівність $(S(n))^n = n^{S(n)}$, де $S(n)$ позначає суму цифр числа n.

79 (IV). На столі стоять п'ять коробок, на яких написані номери 0, 1, 2, 3, 4. У коробках з номерами 1, 2, 3, 4 знаходяться відповідно P_1, P_2, P_3 та P_4 сірників. Двом гравцям по черзі дозволяється взяти декілька (більше нуля) сірників з якоїсь однієї коробки з додатним номером та перекласти їх у коробку, номер якої на одиницю менший. Виграє той, після чийого ходу всі сірники опиняться в нульовій коробці. Хто виграє за правильної гри?

80 (IV). На столі лежать 4 яблука масою 600 г, 400 г, 300 г і 250 г. Двоє суперників по черзі підходять до столу і беруть по яблуку, а потім за командою починають їсти. Наступне яблуко дозволяється брати гравцеві тільки після того, як він з'їв попереднє. Швидкість поїдання однакова в обох суперників. Як повинен поводитися гравець, який починає гру, щоб з'їсти якомога більше? (Вказати, яку найбільшу кількість грамів може забезпечити собі гравець, який починає гру, та протидії суперника).

81 (IV). Розв'язати в дійсних числах рівняння $9^x + 4^x + 1 = 6^x + 3^x + 2^x$.

82 (IV). У трикутник ABC вписане коло. M, N і K – точки його дотику до сторін AB, BC і CA відповідно, BD – медіана. Пряма l проходить через точку D паралельно MN і перетинає прямі BC і BA в точках T та S відповідно. Довести, що $TC = KD = AS$.

83 (IV). Чи існує таке натуральне число a, що кожне з чисел a, $2a$, $3a$, ..., $1997a$ є степенем, тобто має вигляд m^k, де m і k – натуральні числа, причому $k \geq 2$?

84 (IV). Знайти найменше натуральне число, яке не менш ніж двома різними способами представляється у вигляді $19m + 97n$, де m та n – деякі натуральні числа.

85 (IV). Клітини довільної прямокутної дошки розфарбовані в шаховому порядку. В кожній з них записане деяке ціле число. Відомо, що в кожному рядку сума чисел парна і в кожному стовпчику сума чисел парна. Довести, що сума всіх чисел в чорних клітинах парна.

86 (IV). Довести, що для кожного натурального n виконується нерівність $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ \dots\ +\sqrt{2}}}} + \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ \dots\ +\sqrt{6}}}} < 5$, де в лівій частині n двійок та n шісток.

87 (IV). Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не є рівними, але $AC = A_1C_1 = b$, $BC = B_1C_1 = a$ та $BH = B_1H_1$, де BH і B_1H_1 – висоти трикутників. Довести нерівність

$$a \cdot AB + b \cdot A_1B_1 \leq \sqrt{2}\left(a^2 + b^2\right).$$

88 (IV). На шаховій дошці довільних розмірів розставлено кілька ферзів так, що кожен з них б'є рівно k ферзів. Довести, що $k \leq 4$.

89 (IV). У довільному трикутнику ABC вписане та зовнівписане кола дотикаються сторони AB в точках K і L відповідно. Довести, що $|AL| = |KB|$.

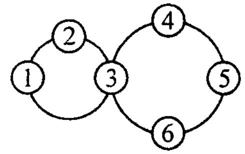
90 (IV). Довести, що для довільного натурального n число $n^{1988} + n^{1987} + 1$ не є простим.

91 (IV). Нехай $\dfrac{m}{n} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots\, +\cfrac{1}{1}}}$, де кількість дробових рисок в правій частині дорівнює 1988 та дріб $\dfrac{m}{n}$ нескоротний. Довести, що $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{m}{n}\right)^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{n^2}$.

92 (IV). Графік параболи $y = x^2 + px + q$ перетинає осі координат в трьох різних точках. Через ці точки проводиться коло. Довести, що всі такі кола перетинаються в одній точці.

93 (IV). На стороні AB довільного трикутника ABC взято точку L, проведені $(LM)||(AC)$, $M \in (BC)$ та $(MN)||(AB)$, $N \in (AC)$. Чому дорівнює максимально можлива площа трикутника LMN?

94 (IV). Шість фішок, що занумеровані числами від 1 до 6, прикріплені до кругів, що обертаються так, як це показано на малюнку. Кожен круг можна обертати за або проти годинникової стрілки, при цьому його фішки відповідно міняються місцями, а фішки іншого круга залишаються на місці (спільна фішка кругів також переміщується). Довести, що за допомогою цих перетворень можна отримати будь-яку розстановку номерів.



95 (IV). На квадратній дошці розміром 10×10 розставлено кілька фішок. Кожним ходом додаються фішки на ті вільні місця, в яких з 4 сусідніх клітинок не менше 2 зайнятих.

а) Довести, що існують такі початкові розташування фішок, для яких позиції після 40-го та 41-го ходів розрізняються.

б) Чи існують початкові розташування фішок, для яких розрізняються позиції після 60-го та 61-го ходів?

10 клас

1 (II). Довести, що якщо $4x + 3y$ ділиться на 5, то $2x - y$ також ділиться на 5.

2 (II). Розв'язати рівняння $\cos x \cos 7x = 1$.

3 (II). Сторони a, b, c трикутника ABC лежать відповідно проти кутів A, B, C. Довести, що бісектриса кута A обчислюється за формулою $l = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

4 (II). Довести, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може бути повним квадратом.

5 (II). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 12; \\ \dfrac{xp}{x+p} = 15; \\ \dfrac{yp}{y+p} = 25. \end{cases}$$

6 (II). У квадраті із стороною 1 довільно розміщено 126 точок. Довести, що деякі шість з них обов'язково лежать всередині кола, радіус якого дорівнює $\dfrac{1}{7}$.

7 (II). Обчислити без таблиць:

$$\mathrm{tg}20^0 \cdot \mathrm{tg}40^0 \cdot \mathrm{tg}60^0 \cdot \mathrm{tg}80^0.$$

8 (II). Знайти значення виразу: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 11x + 13 = 0$.

9 (II). Довжини сторін трикутника утворюють геометричну прогресію із знаменником $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Знайти найбільший кут трикутника (в градусах).

10 (II). Знайти область визначення функції

$$f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+2}}.$$

11 (III). Розв'язати рівняння $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

12 (III). Знайти всі розв'язки рівняння:

$\cos^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = a(1+\sin 2x)$, які належать проміжкові $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

13 (III). Розв'язати рівняння: $x^4 + 1 = 2x^2 \sin y$.

14 (III). Довести, що $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ ділиться на 120.

15 (III). Довести, що $30^n + 4^n(3^n - 2^n) - 1$ ділиться на 11.

16 (III). Довести, що $((a + 1)^{2n+1} + a^{n+2}) \vdots (a^2 + a + 1)$, де a – ціле, n – натуральне або нуль.

17 (III). Довести, що $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ ділиться на $5(x - y)(y - z)(z - x)$, де $x, y, z \in Z$ і попарно різні.

18 (III). Довести, що $9^n(9^n + 1) + 1$ ділиться на $3^n(3^n + 1) + 1$ при будь-якому натуральному n.

19 (III). Довести, що $[(3299^5 + 6)^8 - 1]$ ділиться на 112.

20 (III). Довести, що $3^{105} + 4^{105}$ ділиться на 13.

21 (III). Довести, що $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \ldots\ +\frac{1}{n^2}<1$.

22 (III). Довести нерівність $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$.

23 (III). У крузі проведені хорди AB і AC. Бісектриса кута BAC перетинає коло в точці D. З точки D опущений перпендикуляр DE на пряму AB. Довести, що $AE = 0{,}5(AB + AC)$.

24 (III). У прямокутному трикутнику висота, проведена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких рівна одному з катетів трикутника. Знайти кути трикутника.

25 (III). Через довільну точку усередині трикутника проведені три прямі, паралельні до його сторін. Вони ділять сторони на відрізки $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, як показано на малюнку (стор. 50, *а*). Довести, що $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3$.

26 (III). Навколо трикутника ABC описане коло, точки A_1, B_1, C_1 діаметрально протилежні до точок A, B, C. Точки A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, AC, AB відповідно. Довести, що прямі A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 перетинаються в одній точці (малюнки на стор. 51 *а*, *б*).

27 (III). Довести, що якщо сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то різниця цієї прогресії рівна радіусові вписаного в цей трикутник кола.

28 (III). Дві висоти трикутника не менші, ніж сторони, до яких вони проведені. Знайти кути трикутника.

29 (III). Основи трапеції a і $3a$. Середини кожної основи з'єднані з кінцями іншої. Знайти віддаль між точками перетину проведених відрізків.

30 (III). Бісектриси всіх кутів паралелограма обмежують чотирикутник, в який можна вписати коло. Знайти кути паралелограма.

31 (III). Довести, що остача від ділення простого числа на 30 буде або простим числом, або 1.

32 (III). Знайти всі функції $f: R \to R$, для яких при будь-яких $x \in R$ виконується рівність $x(f(x) + f(-x) + 2 + 2f(-x) = 0$.

33 (III). Відомо, що $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ і $a + b + c + d + e = 100$. Яке найменше можливе значення виразу $a + c + e$?

34 (III). У країні N міст $N \geq 3$. Деякі з міст сполучено шляхами, кожний з яких сполучає рівно два міста. Відомо, що коли якісь два міста не сполучені шляхом, то знайдеться третє місто, сполучене шляхом з кожним з цих двох. Якою може бути найменша кількість шляхів у такій країні?

35 (III). Точки M, N, K позначено відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Точку перетину відрізків AN і BK позначено через L. Довести, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

36 (III). Над натуральним числом дозволяється виконувати такі операції:

а) дописувати в кінці цифру 4;

б) множити його на 5;

в) ділити на 2 (якщо воно є парним), (наприклад, якщо над числом 5 виконати операції *а*), *в*), *б*), *а*), то ми послідовно одержимо $5 \to 54 \to 27 \to 135 \to 135$). Як за допомогою цих операцій одержати з числа 4 натуральне число 1993?

37 (III). Дві висоти трикутника дорівнюють відповідно 12 і 20. Довести, що $7{,}5 < h_3 < 30$, де h_3 – третя висота цього трикутника.

38 (III). У гострокутному трикутнику ABC довжини всіх сторін виражаються непарними числами. Знайти проекцію сторони c на сторону a, якщо $a = 5$; $b = 11$.

39 (III). Розв'язати рівняння:

$$\frac{4\cos x}{(x-1)(x-6)}+|\cos x|=0.$$

39.1 (III). Розв'язати рівняння:

$$\left(\cos^2 x+\cos^{-2} x\right)\left(1+\mathrm{tg}^2 y\right)(3+\sin 3z)=4.$$

Пропонуємо з двох задач, які мають номер 39 (III) і 39.1 (III) вибрати для розв'язування будь-яку задачу.

40 (III). Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{y^2+x^2-2y+1}.$$

41 (III). Знайти число коренів рівняння $\operatorname{tg}\pi\sqrt{40+x}=\operatorname{tg}\pi x$.

42 (III). Висота, що проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника на гіпотенузу, ділить трикутник на два трикутника, в кожний з яких вписано коло. Визначити площу трикутника, утвореного катетами початкового трикутника і прямої, що проходить через центри кіл, якщо висота початкового трикутника дорівнює h.

43 (III). Сім точок в крузі одиничного радіуса розміщені так, що відстань між будь-якими двома з них не менша 1. Довести, що одна з точок співпадає з центром круга.

44 (III). Довести, що рівняння $19x^{19}-92y^2=1992$ не має розв'язку в цілих числах.

45 (III). Дано 1001 різне натуральне число, кожне з яких менше 2000. Довести, що з них можна вибрати три таких числа, що одне з них дорівнює сумі двох інших.

46 (III). На прямій знаходяться павук і муха. Максимальна швидкість павука вдвоє більша максимальної швидкості мухи, але він нічого не знає про місце перебування мухи до тих пір, поки вони не перебуватимуть в одній точці. Чи зможе павук наздогнати муху?

47 (III). Послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху. При всіх $n \ge 1$ $a_{n+1} \ge a_n - \dfrac{1}{n^2}$. Довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

48 (III). Визначити число дійсних коренів рівняння $x^{13}=a(1+x^{14})$ при кожному дійсному a.

49 (III). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2;\\ x^2+y^2=\sin^2 x.\end{cases}$$

50 (III). У прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ AC_1 перпендикулярна до площини, яка проходить через точки A_1, B, D. Довести, що цей паралелепіпед є кубом.

51 (III). У паралелограмі діагоналі дорівнюють d_1 і d_2 $(d_1 > d_2)$, а гострий кут між сторонами α. Знайти площу паралелограма.

52 (III). Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5}=x^2-5$.

53 (III). З усіх розв'язків рівняння $\sin 2x = 4(\sin x - \cos x - 1)$ знайти той, для якого вираз: $-x^2-6x-5$ є найбільшим.

54 (III). Двоє грають у таку гру. Спочатку перший ставить шахового коня на довільну клітинку дошки 8×8, потім другий робить хід цим конем, потім хід робить перший і т. д. Забороняється ставити коня на клітинку, на якій він раніше побував. Програє той, кому при своєму ході нікуди ходити. Хто виграє за правильної гри?

55 (III). Довести, що якщо сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу вписаного кола.

56 (III). Побудувати графік функції $y=\dfrac{-x(2+x^2)}{|x|}$.

57 (III). У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено дві січні площини AD_1M і CD_1N, де M і N є відповідно серединами A_1B_1 і B_1C_1. Визначити кут між цими площинами.

58 (III). Довести, що для довільного натурального n, яке більше 3, десятковий запис числа n^2 містить принаймні одну парну цифру.

59 (III). Довести, що рівняння $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0$ не має дійсних коренів.

60 (III). Точку O, що лежить всередині правильного $2n$-кутника, з'єднаємо з його вершинами. Отримані трикутники розфарбовано через один червоним та синім кольорами. Довести, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх трикутників.

61 (III). На площині задано 1995 точок a_1, ..., a_{1995}. Перетворення S будується у такий спосіб. Спочатку робиться симетрія відносно точки a_1, потім відносно точки a_2 і т. д. аж до останньої симетрії відносно точки a_{1995}. Довести, що існує рівно одна точка, яка не змінюється при перетворенні S.

62 (III). Квадратна таблиця 1995×1995 заповнена різними натуральними числами таким чином, що числа кожного рядка зліва направо монотонно зростають. Одного разу в кожному стовпчику числа переставили так, що вони в стовпчику (згори вниз) монотонно спадали. Довести, що у кожному рядку отриманої таблиці, як і раніше, числа зліва направо монотонно зростають.

63 (IV). Довести, що коли для натуральних чисел n і m справджується рівність $2m=n^2+1$, то число m можна подати у вигляді суми двох квадратів цілих чисел.

64 (IV). Відрізки AB_1, BB_1 і CC_1 є бісектрисами ΔABC. Довести, що рівність $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ буде мати місце тоді і тільки тоді, коли ΔABC правильний.

65 (IV). Довести, що не існує дійсних чисел x, y, z, які б задовільняли систему

$$\begin{cases}x^2+4yz+2z=0;\\ x+2xy+2z^2=0;\\ 2xz+y^2+y+1=0.\end{cases}$$

66 (IV). Дано скінченну послідовність $a_1a_2\ldots a_n$ дійсних чисел. Член a_k цієї послідовності називатимемо "відміченим", якщо серед чисел a_k, a_k+a_{k+1}, ..., $a_k+a_{k+1}+\ldots a_n$ хоча б одне є додатним. Довести, що сума всіх "відмічених" чисел буде додатною.

67 (IV). Знайти найбільше натуральне число n, для якого нерівність $\sin^n x+\cos^n x > \dfrac{1}{2}$ виконується для всіх чисел з відрізка $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

68 (IV). Точки A і B лежать на сторонах опуклого многокутника F_1, а точка A_1 задовільняє співвідношення $AB=BA_1$. Позначимо через F_1 опуклий многокутник найменшої площі, який містить многокутник F і точку A_1. Довести, що площа многокутника F_1 не більша за подвоєну площу многокутника F.

69 (IV). Довести, що для будь-яких чисел a, b, c, d з відрізка $[1, 2]$ виконується нерівність: $\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a}\le 4\frac{a+c}{b+d}$.

70 (IV). На шаховій дошці розміром 100×100 розташовано 800 фігурок вигляду . Кожна така фігурка повністю накриває 4 клітини дошки, і жодні дві фігурки не накривають одну і ту саму клітинку. Довести, що на дошку можна покласти ще одну таку фігурку так, щоб вона повністю накрила 4 вільні клітинки.

71 (IV). Довести, що для довільних $(x;y)$ $\cos(x+y)+2\cos x+2\cos y+3\ge 0$.

72 (IV). У просторі дано кілька точок. Ніякі 4 з них не лежать в одній площині. Якщо сфера проходить через якісь 4 з цих точок, то всі точки, що залишилися, лежать на сфері або всередині неї. Довести, що всі ці точки належать одній сфері.

73 (IV). Нехай $P(x, y)$ – многочлени двох змінних (скінченна сума доданків вигляду $ax^m y^n, m\ge 0, n\ge 0$). Відомо, що для будь-яких x та y $P(x+1, y+1) = P(x, y)$. Довести, що існує многочлен однієї змінної $Q(z)$ такий, що для будь-яких x та y $P(x, y) = Q(x-y)$.

74 (IV). Для натуральних n та k, $n\ge k$ позначено через $P_n^{(k)}$ кількість розбиттів числа n на k натуральних доданків. Розбиття, що відрізняються лише порядком доданків, вважаємо однаковими. Наприклад, $P_4^{(2)}=2$, оскільки $4 = 1 + 3$ та $4 = 2 + 2$. Довести, що для $n\ge 2k$ $P_n^{(k)} = P_{n-1}^{(k-1)} + P_{n-k}^{(k)}$.

75 (IV). Довести, що для додатних a, b, c справедлива нерівність

$$\frac{a+ab}{b+ab}+\frac{b+bc}{c+bc}+\frac{c+ac}{a+ac}<\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2.$$

76 (IV). Нехай $ABCD$ – будь-який тетраедр, K і L – середини протилежних ребер AD і BC. Через пряму KL проведена деяка площина, яка перетинається з прямими AB і CD в точках M_1 і M_2. Довести, що точки M_1 і M_2 рівновіддалені від прямої KL.

77 (IV). Довести, що похідна функції

$$f(x)=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x-4}\cdot\frac{x-5}{x-6}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{x-1987}{x-1988}$$

від'ємна в усіх точках $x\ne 2, 4, 6, 8, \dots, 1988$.

78 (IV). Знайти розв'язки (x, y, z) системи рівнянь

$$\begin{cases}\sin x+\sin y+\sin z=\frac{3\sqrt{3}}{2};\\ \cos x+\cos y+\cos z=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

79 (IV). Довести, що площа фігури, обмеженої осями Ox, Oy, прямою $x=\frac{\pi}{2}$ та графіком функції $y=\frac{\sin x}{x}$ не менша 1.

80 (IV). На сфері одиничного радіуса розміщено n точок. Довести, що сума квадратів всіх попарних віддалей між ними не перевищує n^2. Чи може це значення досягтись?

81 (IV). Послідовність невід'ємних чисел $\{a_n\}$ така, що $a_{n+2}^{1981}\le a_{n+1}^{1980}\cdot a_n$ для всіх $n\ge 1$. Довести, що ця послідовність збіжна.

82 (IV). Довести, що якщо для всіх $x\in\,]-1, 1[$ виконується нерівність

$$|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ \dots\ +a_n\sin b_nx|\le|\sin x|,$$

$$\text{то } |a_1b_1+a_2b_2+\ \dots\ +a_nb_n|\le 1.$$

83 (IV). Вчитель написав на дошці многочлен третього степеня. Один з учнів за власним бажанням додав чи відняв від цього многочлена його похідну. Одержаний многочлен він написав на листочку паперу і передав його іншому учневі. Той проробив з новим многочленом знову таки, за власним бажанням, одну з двох вказаних вище операцій (додавання чи віднімання похідної) і листок з результатами передав іншому учневі і т. д. Через деякий час у одного з учнів вийшов той самий многочлен, який був написаний вчителем на дошці. Довести, що хоча б один з учнів помилився.

84 (IV). Чи існує многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(19) = P(81) = 1981$, а $P(1981)$ дорівнює 19 або 81?

85 (IV). Довести, що в квадратній таблиці розміру $2n\times 2n$ можна розставити числа $-1, 0, 1$, щоб суми в кожному рядку і стовпчику таблиці були рівними.

86 (IV). Фігура, обмежена лініями $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. У якій точці графіка функції $y=\frac{1}{x}$ треба провести дотичну до нього, щоб вона відтинала від фігури трапецію з найбільшою площею?

87 (IV). Розглянути послідовність $\{a_n\}$, яка утворена за таким законом: $a_0=1,\ a_{n+1}=\int\limits_0^{a_n}C^{x^2}dx\ (n\ge 0,\ C\ge 0)$. Вказати всі значення C, при яких послідовність $\{a_n\}$ має границю. Обчислити границю.

88 (IV). Для того, щоб висоти трикутної паріміди перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб суми квадратів протилежних ребер піраміди були рівними між собою. Довести це.

89 (IV). Нехай $a_1, \dots a_n$ – додатні числа і $k<n$. Для кожного розбиття множини $\{1, 2, \dots, n\}$ на дві множини $\{i_1, \dots, i_k\}$ і $\{i_{k-1}, \dots, i_n\}$ обчислити $\frac{a_{i_1}+\ \dots\ +a_{i_k}}{a_{i_{k+1}}+\ \dots\ +a_{i_n}}$. Довести, що сума всіх одержаних чисел не менша, ніж $\frac{k}{n-k}C_n^k$, тобто $\sum\limits_{\{i_1,\dots,i_k\}}\frac{a_{i_1}+\ \dots\ +a_{i_k}}{a_{i_{k+1}}+\ \dots\ +a_{i_n}}\ge\frac{k}{n-k}C_n^k$.

90 (IV). Знайти всі функції f, визначені на множині дійсних чисел, які набувають дійсних значень та задовільняють рівняння $f(x^3 + y^3) = (f(x+y))^3$ для всіх дійсних x та y.

91 (IV). Довести нерівність

$$\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{2\pi}{20}+\ldots+\sin\frac{\alpha\pi}{20}<\frac{99}{10}-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{10}-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{10}-\ldots-\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{9}{10}$$

92 (IV). Нехай O позначає точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, причому $\angle AOB > \frac{\pi}{2}$. На променях OA та OB відмітили точки A_1 та B_1 відповідно так, що $A_1B_1 \| AB$ та $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2}\angle ABC$. Довести, що $A_1D \perp B_1C$.

93 (IV). Центр правильного октаедра з'єднано відрізками з центрами всіх його граней. Центр кожної з граней з'єднано відрізками з серединами всіх ребер, які лежать на границі цієї грані. Середину кожного ребра з'єднано відрізками з його кінцями. Довести, що кожному з отриманих відрізків можна приписати число $+1$ або -1 так, щоб добуток чотирьох чисел, які відповідають сторонам довільного просторового чотирикутника з отриманих відрізків, дорівнював -1.

(Октаедром називається фігура, яку можна отримати, склеївши основами дві піраміди Хеопса).

94 (IV). Розв'язати рівняння $\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x$.

95 (IV). Три кола $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ дотикаються одне до одного зовнішнім чином. Нехай A, B, C позначають точки дотику кіл ω_1 та ω_2, ω_2 та ω_3, ω_3 та ω_1 відповідно. Точки D та E вибрано на колах ω_1 та ω_2 відповідно таким чином, що DB є спільною дотичною до кіл ω_2 та ω_3, а EC є спільною дотичною до кіл ω_3 та ω_1. Нехай O позначає точку перетину відрізків DB та EC. Довести, що $OA = OB = OC$.

96 (IV). Довести, що для довільних двох натуральних чисел a та b числа a, b, $\frac{a+b}{1996}$ не можуть бути членами однієї геометричної прогресії (не обов'язково сусідніми та не обов'язково у вказаному порядку).

97 (IV). Позначимо через S множину всіх точок координатної площини з цілими координатами. Будемо говорити, що взаємнооднозначне відображення S в себе зберігає відстань x, якщо образи довільних двох точок з S, які знаходилися на відстані x, знову знаходяться на відстані. Чи правда, що взаємно однозначне відображення буде зберігати будь-яку відстань, якщо:

а) воно зберігає відстань 1?

б) воно зберігає відстань 2?

в) воно зберігає відстань 2 та 3?

11 клас

1 (II). При якому значенні n вільний член рівняння $x^2 + 2nx - 16n - 64 = 0$, зменшений на квадрат різниці коренів цього рівняння, буде найбільший?

2 (II). В одиничний квадрат кинули 51 точку. Довести, що деякі три з них обов'язково лежать всередині круга радіуса $\frac{1}{7}$.

3 (II). Знайти висоту прямого паралелепіпеда, у якого сторони основи 19 см і 22 см, а діагоналі утворюють з площиною основи кути в 30^0 і 60^0.

4 (II). Знайти числа A і B такі, щоб функція виду $f(x) = A\cdot 3^x + B$ задовільняла умовам $f'(0) = 2$ і $\int_1^2 f(x)dx = 12$.

5 (II). Довести, що якщо $4x + 3y$ ділиться на 5, то $2x - y$ також ділиться на 5.

6 (II). Чи існує трикутник, у якого точки перетину бісектрис є серединою однієї з бісектрис?

7 (II). Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

8 (II). Знайти найбільше ціле значення x, що задовільняє нерівності

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2x+6} > \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)^{x+7}.$$

9 (II). Знайти суму всіх цілих розв'язків рівняння

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1.$$

10 (III). Знайти всі пари дійсних чисел x, y, які задовільняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6; \\ 3^x \cdot 16^y = 48. \end{cases}$$

11 (III). У трикутній піраміді сума плоских кутів при кожній вершині основи дорівнює 180^0. Площа основи S_0. Знайти повну поверхню піраміди.

12 (III). Довести, що для кожного натурального числа n виконується нерівність $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > n\sqrt[n]{2} - n$.

13 (III). Кожна точка площини пофарбована в чорний або білий колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами 30^0, 60^0, 90^0 і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.

14 (III). Відомо, що деякий многочлен у раціональних точках набуває раціональних значень. Довести, що всі його коефіцієнти раціональні.

15 (III). Довести, що $2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6 при будь-якому натуральному n.

16 (III). Довести, що $(4^n + 15n - 1)$ ділиться на 9 при будь-якому натуральному n.

17 (III). Довести, що $(1^n + 2^n + \ldots + m^n)$ ділиться на $(1 + 2 + \ldots + m)$, де $n, m \in N$ і n – непарне.

18 (III). Нехай $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – послідовність чисел, утворених за таким законом: $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$. Довести, що при $n > 1$ a_n ділиться на $n - 1$.

19 (III). Розв'язати рівняння: $\log_{\frac{1}{2}}|x| = \frac{1}{4}(|x-2|+|x+2|)$.

20 (III). З трьох точок, які лежать у горизонтальній площині на віддалі a, b і c від основи телевізійної вишки, її видно під кутами, сума яких дорівнює 90^0. Знайти висоту вишки.

21 (III). Довести, що для будь-якого α і $\beta \neq k\frac{\pi}{2}(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ справджується нерівність $\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta} \geq 1$. При яких α і β виконується рівність?

22 (III). Основою піраміди є правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основи, дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайти величини кутів нахилу бічних ребер піраміди до площини основи.

23 (III). Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата як на діаметрах всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру "квітка". Довести, що загальна площа цієї "квітки" дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

24 (III). Переставивши в деякому порядку числа 1, 2, ..., 1994, дістали послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_{1994}$. Довести, що найбільше з чисел $(n-1)a_n$, $1 \leq n \leq 1994$, не менше 997^2.

25 (III). Знайти усі функції $f: R \to R$, які при будь-яких дійсних x, y задовільняють рівність $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$.

26 (III). Трикутник $A_1B_1C_1$ є у просторі ортогональною проекцією правильного трикутника ABC з довжиною сторони 1. Відомо, що $A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Довести, що кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$ більший за 60^0.

27 (III). Для всіх дійсних x довести нерівність:

$$x^2\sin x + x\cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0.$$

28 (III). Довести, що $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

29 (III). Дано n додатних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ таких, що $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Довести, що $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2$.

30 (III). Довести, що при будь-якому $n \in N$ число $2^{3^n} + 1$ ділиться на 3^{n-1} і не ділиться на 3^{n-2}.

31 (III). Довести, що площина, яка проходить через кінці трьох ребер куба, які виходять з однієї вершини, перпендикулярна до діагоналі куба, яка виходить з тієї ж вершини і відтинає від неї третю частину.

32 (III). Над натуральним числом дозволяється виконувати такі операції:

а) дописувати в кінці цифру 4,

б) множити його на 5;

в) ділити на 2 (якщо воно є парним), (наприклад, якщо над числом 7 виконати операції *б*), *а*), *в*), *б*), то одержимо число 885). Як за допомогою цих операцій одержати з числа 4 натуральне число 1993?

33 (III). На столі стоїть циліндр, наповнений водою. Якщо нахилити його так, що площина основи утворюватиме з площиною стола кут α, то виллється $\frac{1}{8}$ частини води. Якщо після цього кут нахилу площини основи до площини стола збільшиться в 2 рази, то виллється $\frac{2}{7}$ тієї кількості води, що лишилася після першого разу. Визначити величину кута α.

34 (III). Розв'язати рівняння

$$\mathrm{tg}^2(x+y) + \mathrm{ctg}^2(x+y) = 1 + 2x - x^2.$$

35 (III). Знаючи, що $\lg 16 = 1{,}20412\ldots$, визначити першу цифру числа 125^{100}.

36 (III). Довести, що $\log_{0,5}\sin 18^0 + \log_{0,5}\sin 54^0 = 2$.

37 (III). Якщо сума квадратів діагоналей чотирикутника дорівнює сумі квадратів його сторін, то чотирикутник є паралелограмом. Довести це.

38 (III). Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$. Встановити, для яких p воно має розв'язки.

39 (III). Довести, що в усякому трикутнику з сторонами a, b, c і кутами α, β, γ має місце співвідношення: $(a+b)\cos\gamma + (b+c)\cos\alpha + (c+b)\cos\beta = 2p$.

40 (III). У прямокутному трикутнику ABC бісектриса CE прямого кута C ділиться центром O вписаного кола так, що $CO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Знайти гострі кути трикутника.

41 (III). Довести, що $m^5n - n^5m$ ділиться на 30 при будь-яких m і n.

42 (III). Розв'язати рівняння $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$.

43 (III). Знайти суму всіх цілих розв'язків рівняння

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1.$$

44 (III). Розв'язати нерівність $2x^4 \leq \sin^4 x + \cos^6 x - 1$.

45 (III). Навколо конуса, висота якого 1 м, описана піраміда, основа якої – ромб $ABCD$ ($\angle A$ – гострий) з діагоналями 6 м та 8 м. Знайти радіуси куль, які вписані в трьохгранний кут з вершиною A при основі та дотикаються бічної поверхні конуса.

46 (III). Переріз правильної трикутної піраміди з стороною основи a деякою площиною являє собою квадрат зі стороною b. Знайти об'єм піраміди.

47 (III). Про дійсне число k та послідовність дійсних чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots$ відомо, що $u_0 = 1$, $u_{1995} = 100$, $u_1u_2 > 0$, $u_{n-1} \cdot u_{n+1} = ku_n$ для всіх натуральних n. Знайти k.

48 (III). Чи існує такий многочлен $p(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що $p(x) \geq 1995p'(x)$ для всіх дійсних x?

49 (III). Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень на цій самій множині. Для довільного числа n з цієї множини має місце рівність

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3. \text{ Знайти } f(1995).$$

50 (III). У деякому місті є кілька (більше, ніж один) автобусних маршрутів. Кожні два з них мають рівно одну спільну зупинку, кожні дві зупинки з'єднує хоча б один маршрут.

а) Знайти кількість маршрутів, якщо на кожному маршруті рівно три зупинки.

б) Знайти кількість автобусних зупинок на кожному з маршрутів у місті, якщо кількість маршрутів дорівнює 13 і на кожному маршруті не менше трьох зупинок.

51 (III). Довести, що якщо сторони трикутника $a < b < c$ утворюють арифметичну прогресію, то $ac = 6Rr$.

52 (III). Побудувати графік функції $y = |x| + \cos x$.

53 (III). Не розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ y^2 + z^2 = 48; \ x, y, z > 0, \\ y^2 - xz = 0, \end{cases}$$

обчислити $xy + yz$.

54 (III). На площині намалювали опуклий п'ятикутник і відмітили середини сторін. Після цього весь малюнок витерли, залишивши відмічені точки. Як відновити малюнок?

55 (III). У квадраті зі стороною 1 розміщено 101 точку, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Довести, що існує трикутник з вершинами в цих точках, площа якого не перевищує $\frac{1}{100}$.

56 (III). Довести, що значення виразу $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ є натуральним числом.

57 (III). У трикутнику ABC $AB = AC$ і $\angle A = 100^0$; $P \in AC$, BP – бісектриса кута B. Довести, що $AP + PB = BC$.

58 (III). Знайти всі дійсні числа x, y такі, що

$$x \ge y \ge 1 \text{ та } 2x^2 - xy - 3x + y + 1 = 0.$$

59 (III). Чи можна з кубиків розмірами $1 \times 1 \times 1$ склеїти фігуру, площа поверхні якої дорівнює 1997? (При склеюванні кубики з'єднуються так, що їх відповідні грані повністю співпадають).

60 (III). Про функцію $f: R \to R$ відомо, що множина значень суми $f(x) + f(rx)$, $x \in R$, скінченна. Чи обов'язково множина значень $f(x)$, $x \in R$, скінченна?

61 (III). Двоє гравців у виразі

$$a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \cos 4x + \ \dots \ + \\ + a_{1996} \cos 1996x + a_{1997} \sin 1997x$$

по черзі вибирають ще не обрані a_i та замінюють їх будь-якими дійсними числами. Коли всі a_i замінені, отримується функція $f(x)$. Якщо рівняння $f(x) = 0$ має корінь на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то виграє той, хто починав гру. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

62 (III). Дано невід'ємні дійсні числа x та y, які задовільняють умову

$$x - \sqrt{x} < x - \frac{1}{4} \le x + \sqrt{x}.$$

Довести, що для цих чисел виконуються також і нерівності

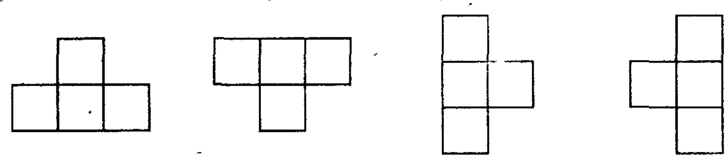
$$y - \sqrt{y} \le x - \frac{1}{4} \le y + \sqrt{y}$$

63 (III). Розв'язати рівняння. $\cos 12x = 5\sin 3x + 9\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x$.

64 (III). Відомо, що на сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ існують такі точки K і M відповідно, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P – точка перетину прямих KM та BD. Знайти відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

65 (III). Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і приймає дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ має принаймні один корінь та $f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x \ne 0$ та $y \ne 0$. Визначити $f(-1)$.

66 (III). Прямокутник розміром $2^{1998} \times 1998^2$ поділено на одиничні квадратики-клітинки. Довести, що кількість способів, якими цей прямокутник можна розбити на фігурки, кожна з яких є або прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок фігуркою вигляду



є числом парним.

(Способи, які відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними).

67 (IV). Чи існує такий набір із 1991 попарно не паралельних векторів, який має таку властивість: для будь-яких двох векторів цього набору знайдеться у цьому наборі третій вектор, який перпендикулярний до цих двох векторів?

68 (IV). Нехай ABC – довільний трикутник. Через точку K, взяту на AB, проведено пряму паралельно стороні AC до перетину зі стороною BC у точці

L і пряму паралельно BC до перетину зі стороною AC у точці M. При якому положенні точки K площа ΔKLM буде найбільшою? Чому дорівнює ця площа, якщо площа ΔABC дорівнює S_0?

69 (IV). У кожній вершині правильного 1992-кутника записано додатне число, причому кожне з цих чисел дорівнює середньому геометричному або середньому арифметичному двох чисел, які записано в сусідніх вершинах. Відомо, що серед записаних чисел є число 26. Знайти решту записаних чисел.

70 (IV). Довести, що коли $a > b > c$, то виконується нерівність

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

71 (IV). Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти трикутника ABC. Довести, що рівність $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ виконується тоді і тільки тоді, коли трикутник ABC рівносторонній.

72 (IV). Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$. Бічне ребро SA перпендикулярне до площини основи. Площина, яка проходить через вершину А перпендикулярно до ребра SC, перетинає бічні ребра SB, SC, SD у точках B_1, C_1, D_1. Довести, що навколо многогранника $ABCDB_1C_1D_1$ можна описати сферу.

73 (IV). Член журі та учасник олімпіади грають у таку гру: кожний з них бере по черзі сірники з купки, в якій перед початком гри було 1995 сірників. За своїм ходом гравець повинен взяти 1 або 2 сірники (але не більше, ніж за попереднім своїм ходом). Виграє той, хто бере сірники останнім. Почесне право першого ходу надається учаснику олімпіади. Хто виграє, якщо обидва гравці гратимуть найкращим чином?

74 (IV). Яку найбільшу кількість рівних плоских кутів може мати тетраедр, якщо він не є правильним?

75 (IV). Про натуральні числа m і n відомо, що кожне з чисел $m^{1994}+n^{1994}$ та $m^{1995}+n^{1995}$ ділиться на 1995. Довести, що кожне з чисел m та n також ділиться на 1995.

76 (IV). Чи існує многочлен вигляду
$f(x)=x^{1995}+a_1x^{1994}+\ldots+a_{1994}x+a_{1995}$ такий, що для всіх x із проміжку $[0;\ 3^{1995}]$ виконується нерівність $|f(x)|\le 1$?

77 (IV). Довести, що система

$$\begin{cases}\left[n\sqrt{2}\right]=\left[m\sqrt{3}\right];\\ n\le 1995\end{cases}$$

має не менше 700 різних натуральних розв'язків (m, n). ($[x]$ означає цілу частину числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x).

78 (IV). Чи існує функція $y=f(x)$, яка одночасно задовільняє такі умови:
а) для всіх дійсних чисел x виконується рівність $f(f(x))=-x$;

б) для будь-яких $a < b$ функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ набуває всіх проміжних значень між $f(a)$ та $f(b)$?

79 (IV). Якого найбільшого і якого найменшого значень може набувати добуток xyz, якщо дійсні числа x, y, z задовільняють систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y+z=4;\\ x^2+y^2+z^2=6?\end{cases}$$

80 (IV). Вписана у тетраедр $ABCD$ сфера дотикається до граней BCD, ACD, ABD і ABC у точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Відомо, що AB_1 і BA_1 перетинаються. Довести, що CD_1 і DC_1 також перетинаються.

81 (IV). Знайти всі розв'язки (x, y, z) системи рівнянь:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y+\sin z=\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\\ \cos x+\cos y+\cos z=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

82 (IV). Довести, що площа фігури, обмеженої осями Ox, Oy, прямою $x=\frac{\pi}{2}$ та графіком функції $y=\frac{\sin x}{x}$, не менша 1.

83 (IV). На сфері одиничного радіуса розміщено n точок. Довести, що сума квадратів усіх попарних віддалей між ними не перевищує n^2. Чи може це значення досягатись?

84 (IV). Послідовність невід'ємних чисел $\{a_n\}$ така, що $a_{n+2}^{1981}\le a_{n+1}^{1980}a_n$ для всіх $n\ge 1$. Довести, що ця послідовність збіжна.

85 (IV). Довести, що якщо для всіх $x\in(-1, 1)$ виконується нерівність $|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ \ldots\ +a_n\sin b_nx|\le|\sin x|$, то $|a_1b_1+a_2b_2+\ \ldots\ +a_nb_n|\le 1$.

86 (IV). Вчитель написав на дошці многочлен 3-го степеня. Один з учнів, за своїм бажанням, додав чи відняв від цього многочлена його похідну. Одержаний многочлен він написав на листку паперу і передав його іншому учневі. Той учень проробив з новим многочленом – знову таки, за своїм бажанням, – одну з двох вказаних вище операцій (додавання чи віднімання похідної) і листок з результатом передав іншому учневі і так далі. Через деякий час у одного з учнів вийшов той самий многочлен, який був написаний вчителем на дошці. Довести, що хоча б один з учнів помилився.

87 (IV). Чи існує многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(19)=P(81)=1981$, а $P(1981)$ дорівнює 19 або 81?

88 (IV). Довести, що в квадратній таблиці розміру $2n\times 2n$ можна розставити числа -1, 0, 1 так, щоб всі суми в кожному стовпчику і в кожному рядку таблиці були різними.

89 (IV). Довести, що коли дійсні числа x і y належать проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і задовольняють рівність: $(1-\sin x)(1-\sin y)=\cos x\cos y$, то $x=y$.

90 (IV). Довести, що існує безліч таких пар натуральних чисел m і n, що кожне з чисел $1996m + 1$, $1996n + 1$ і $mn + 1$ є точним квадратом.

91 (IV). Послідовність $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ дійсних чисел задовільняє умови: $a_0 = 1$, $a_{499} = 0$ і для всіх натуральних n $a_{n+1} = 2a_1 a_n - a_{n-1}$.

а) Довести, що $|a_1| \le 1$

б) Знайти a_{1996}.

92 (IV). На ребрі AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довільно вибрали точку P. Потім на ребрі AD взяли таку точку Q, що $AP = DQ$. Довести, що величина двогранного кута між площинами A_1PC та A_1QC не залежить від вибору точки P

93 (IV). Довести, що для всіх додатних чисел x виконується нерівність.

$$\frac{\sin x}{x} + x^2 > 1.$$

94 (IV). У трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці D. Перпендикуляр до цієї бісектриси, проведений через середину M відрізка AD, перетинає пряму BC в точці N. Довести, що пряма NA є дотичною до кола, описаного навколо трикутника ABC.

95 (IV). Нехай для всіх дійсних чисел x функція $f(x)$ задовільняє співвідношення $(x-1)\cdot f(x+1) - (x+1)\cdot f(x-1) = 4x(x^2-1)$.

а) довести, що функція $f(x)$ є неперіодичною;

б) чи може функція $f(x)$ бути многочленом?

в) чи може функція $f(x)$ бути не многочленом?

96 (IV). Довести, що для кожного натурального n кількість тих $2n$-цифрових чисел, десятковий запис яких містить n цифр 1 і n цифр 2, дорівнює кількості тих n-цифрових чисел, десятковий запис яких містить лише цифри 1, 2, 3, 4 (у записі можуть зустрічатись не всі ці цифри), причому цифр 1 і 2 – порівну.

РОЗВ'ЯЗКИ

8 клас

1 (II). Виконаємо перетворення $(x + y + z)^2 = 1$; врахуємо, що $(a-b)^2 \ge 0$, $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Замінивши $2xy$, $2yz$, $2xz$ більшими величинами, одержимо $3(x^2 + y^2 + z^2) \ge 1$.

2 (II). На віддалі 1 км шини зносяться на $\frac{1}{24000}$ і $\frac{1}{16000}$, а разом $\frac{1}{24000} + \frac{1}{16000} = \frac{1}{96000}$. Тоді максимальний шлях буде

$$\left(1 : \frac{1}{96000}\right)\cdot 2 = 192000 \text{ (км)}.$$

3 (II). $127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} < 2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18} < 513^{18}$.

4 (II). 21 квадрат (9 маленьких, 8 квадратів зі сторонами, що утворюють кути в 45^0 зі сторонами маленьких (*chmf, ding, qngl, hozm, aige, bjzf, cosx, dptl*) та ще 4 (*cizl, doqf, ajzk, bpse*))

```
  ab
  cd
efghij
klmnop
  qz
  st
```

Якщо забрати 6 точок *a, c, f, n, p, z,* то не можна побудувати жодного.

5 (II). Виконайте малюнок, розгляньте ряд трикутників і все стане зрозумілим.

6 (II). $\begin{cases} x - \sqrt{x+2} \ge 0; \\ x + 2 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2; \\ x^2 \ge (x+2), \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$

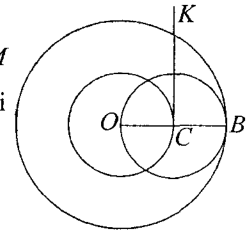
7 (II). При $x < 0$, $y = \frac{3}{2}x$. При $x \ge 0$, $y = \frac{3x^2}{x-x} = \frac{3x^2}{0}$ (не існує).

Частина прямої $y = \frac{3}{2}x$, при $x < 0$.

8 (II). 11 кг свіжих грибів містять x кг грибної речовини і y кг води, тобто $x + y = 11$. У сухих грибах теж x кг грибної речовини і z кг води, тобто $x + z = 1{,}25$. Відомо, що z складає 12% від 1,25 кг, тобто $z = 1{,}25\cdot 0{,}12 = 0{,}15$. Отже, $x = 1{,}25 - 0{,}15 = 1{,}1$, а $y = 11 - 1{,}1 = 9{,}9$. Відсотковий вміст води у свіжих грибах становить $9{,}9\cdot 100 : 11 = 90\%$.

9 (II). Якщо сума цифр числа n^2 $(n \in N)$ дорівнює 1993, то вона не ділиться на 3, тобто, при діленні на 3 дає остачу 1 або 2. Тоді n^2 при діленні на 3 дає остачу 1. 1993 при діленні на 3 дає в остачі 1. То сума цифр може дорівнювати 1993.

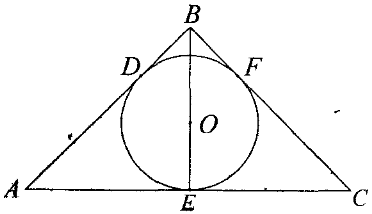
10 (II). Нехай x – радіус концентричного кола. За умовою, $2\pi x^2 = \pi R^2$. Звідки $x = \sqrt{R\cdot\frac{R}{2}}$. Будуємо відрізок $OB = R$, точку C – середину OB, коло з центром C і радіусом $\frac{R}{2}$; пряму $KC \perp OB$; точку M перетину прямої KC і цього кола. Коло з центром O і радіусом OM – шукане.



Доведення

$$OM^2 = R \cdot \frac{R}{2}, \text{ або } \pi \cdot OM^2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

11 (II). Із умови задачі відомо: $AB = BC = a$; $\angle ABC = 120^0$. BE – висота, медіана, бісектриса, то $\angle CBE = 60^0$, тому $BE = \frac{a}{2}$, $AE = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ як дотичні з однієї точки A.



Розглянемо ΔODB: $OD \perp DB$, звідси $2DB = OB$, а $DB = AB - AD$;

$$OB = 2\left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a\left(2 - \sqrt{3}\right);$$

$$r = OE = BE - OB = \frac{a}{2} - a\left(2 - \sqrt{3}\right) = a\left(-1{,}5 + \sqrt{3}\right).$$

Відповідь. $r = a\left(-1{,}5 + \sqrt{3}\right)$.

12 (II). Нехай довжина дороги вгору дорівнює x км, а рівниною – y км, довжина дороги з гори – z км. За умовою складемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 2{,}9; \\ \frac{z}{3} + \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = 3{,}1; \\ x + y + z = 11{,}5. \end{cases}$$

Додамо два перших рівняння системи, одержимо рівняння: $\frac{8}{15}(x+z) + \frac{y}{2} = 6.$

Підставимо в це рівняння значення $x + z$ із третього рівняння системи, одержимо рівняння:

$$\frac{8}{15}\left(\frac{23}{2} - y\right) + \frac{y}{2} = 6. \text{ Звідки } y = 4.$$

Зауваження. Можна розв'язання задачі звести до складання і розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими, якщо довжину дороги рівниною виразити як різницю довжин всієї дороги (11,5 км) і довжин доріг вгору і з гори.

22 (II).

$$\begin{array}{r|l} n^2+5 & n+5 \\ \hline -\;n^2+5n & n-5 \\ -5n+5 & \\ -\;-5n-25 & \\ 30 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n+5=1 & n=-4 \\ n+5=2 & n=-3 \\ n+5=3 & n=-2 \end{array}\right\} \text{ не є натуральними}$$

$$\begin{array}{ll} n+5=5 & n=0 \\ n+5=6 & n=1 \\ n+5=10 & n=5 \\ n+5=15 & n=10 \\ n+5=30 & n=25 \end{array}$$

Відповідь: **1, 5, 10, 25.**

38 (III). *Відповідь* (882, 828, 288), [illegible] 47, 477), **(666,** 666, 666), (558, 585, 855).

39 (III). Так, буде. Це $\left(\frac{10^{1998}+2}{3}\right)^2$.

40 (III). Нехай A_1, B_1, C_1 точки дотику із сторонами BC, AC, AB відповідно. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1, такою ж буде і наша пряма, проведена з A_1. Вказані прямі будуть висотами трикутника $A_1B_1C_1$ і тому перетинаються в одній точці.

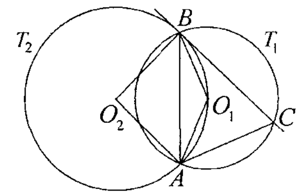
41 (III). Виграш може забезпечити собі той, хто ходить другим. Після ходу першого в клітинку з якимось номером (див. малюнок) він має зафарбувати іншу клітинку з таким самим номером.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

42 (III). $m^2 + 9mn + n^2 = (m-n)^2 + 11mn$, тому на 11 ділиться і $(m - n)$, і $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$.

43 (III). Очевидно, що a, b з наших рівностей додатні. З першої рівності $\frac{a}{b} = b + \frac{1}{b} \geq 2$, з другої $\frac{b}{a} \geq 2$. Протиріччя.

44 (III). Якщо $\angle ABC = \alpha$, то $\angle ABO_2 = 90^0 - \alpha$, $\angle AO_2B = 2\alpha$, $\angle AO_1B = 180^0 - \alpha$, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO_1B = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Звідки випливає, що $\angle BAC = \angle BCA$, $AB = BC$.



45 (III). Нехай спочатку маємо $a_1 + a_{n+1} = a_2 + a_{n+2} = \ldots a_n + a_{2n} = 2b$. Вважаємо, що $a_i = b - c_i$, $a_{n+i} = b + c_i$. Щоб одержати однакові добутки в парах, треба найменше число помножити на найбільше, друге знизу значення на друге зверху і т. д. Тому ми одержуємо добуток $(b - c_i)(b + c_i) = b^2 - c_i^2$. Одержимо, що всі c_i рівні.

46 (III). $\angle AOC = 2\angle ABC$, $\angle OAC = 90^0 - \angle ABC$, $\angle HAB = 90^0 - \angle ABC$, звідси $\angle OAB = |\angle BCA - \angle OAC - \angle HAC| = |\angle ABC - \angle BCA|$.

47 (III). $\left(\sqrt{19} - 4\right)^2 = 35 - 8\sqrt{19}$, $\sqrt{19} > 4$

$$\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\left(\sqrt{19} - 4\right)}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{35 - 8\sqrt{19}}} = \sqrt{\sqrt{19} - \left(\sqrt{19} - 4\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

48 (III). $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, бо $(a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$,

$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 2(a^3b + b^3a)$, бо $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

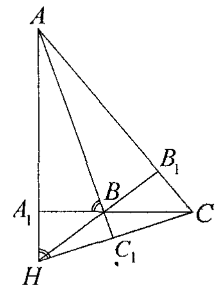
Додавши ці дві нерівності та розділивши на 6, отримаємо:

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{3} \ge \frac{a^3b+ab^3}{2}.$$

49 (III). Якщо квиток $\overline{abcdef}$ щасливий, то квиток $\overline{defabc}$ також щасливий. Тому всі щасливі квитки вигляду $\overline{abcdef}$, де $\overline{abc} \ne \overline{def}$, можна розбити на пари $\left(\overline{abcdef},\ \overline{defabc}\right)$. Сума номерів квитків кожної пари $\overline{abcdef}+\overline{defabc}=1001\left(\overline{abc}+\overline{def}\right)$ ділиться на 1001. Номери решти щасливих квитків мають вигляд $\overline{abcabc}=1001\ \overline{abc}$ і самі діляться на 1001.

50 (III). Спочатку ставимо обидва годинники і, коли мине 5 хвилин, перевертаємо п'ятихвилинний годинник, а потім, коли закінчить іти семихвилинний годинник, п'ятихвилинний потрібно перевернути знову і чекати поки він знову зупиниться. Таким чином відмірюється 9 хвилин.

51 (III). $AA_1 \perp BC,\ BB_1 \perp AC,\ CC_1 \perp AB$.



H – точка перетину висот.

$\Delta CHA_1 = \Delta AA_1B$ (за гіпотенузою і гострим кутом).

$CH = AB$ і $\angle A_1BA = \angle A_1HC$.

Тому $HA_1 = BA_1 \Rightarrow$ прямокутний ΔBA_1H є рівнобедреним, тому $\angle A_1BH = 45^0$, $\angle A_1BH = \angle B_1BC$ як вертикальні, тому $\angle B_1BC = 45^0$. Але ΔBB_1C – прямокутний, то $\angle BCB_1 = 45^0$. Отже, $\angle ACB = 45^0$.

52 (III). $A=\frac{1}{x+1+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=$

$$=\frac{z}{z+xz+1}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{1+z}{1+z+xz}+\frac{x}{x+xy+1}=$$

$$=\frac{1+z}{1+z+xz}+\frac{zx}{zx+1+z}=\frac{1+z+xz}{1+z+xz}=1.$$

53 (III). Будь-який спільний дільник чисел $x = 9m + 7n$ і $y = 3m + 2n$ повинен бути спільним дільником чисел

$x - 3y = 9m + 7n - 9m - 6n = n$ та $7y - 2x = 21m + 14n - 18m - 14n = 3m$.

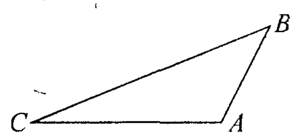
Оскільки числа m та n не мають спільних дільників, крім 1, то будь-який спільний дільник чисел n та $3m$ повинен бути спільним дільником числа 3, тобто він не більше 3. Доведемо, що дорівнювати 3 він може. Нехай $m = 1$, $n = 3$, тоді $x = 9 + 21 = 30$, $y = 3 + 6 = 9$.

54 (III). $\angle A > \angle B$, $BC > AC$. Довести $BC > \frac{1}{2}AB$.

Нехай $BC \le \frac{1}{2}AB$, тоді

$$\begin{array}{l} AC \le \frac{1}{2}AB \\ BC \le \frac{1}{2}AB \\ \hline AC + BC < AB \end{array} +$$

– протиріччя.



55 (III). Доведемо спочатку, що в учнів початкової школи є або не більше трьох різних дідів, або один дід є спільним для всіх дітей.

65 (III). Може. Наприклад

• •
∘ ∘ ∘
• •

(правильний шестикутник з відміченим центром описаного кола, радіус якого 10 м). Тут ∘ – груші, • – яблуні.

66 (III). $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ ділиться на 6 при кожному натуральному n. Розіб'ємо числа на пари $(*n^8, *n^6)$, $(*n^7, *n^5)$, $(*n^4, *n^2)$, $(*n^3, *n)$. Оксана має ставити кожного разу знак, протилежний знакові, що ставить Петро, біля числа, що лежить у тій самій парі, що й число, біля якого поставив знак Петро. Тоді вираз, що отримається, буде ділитися на 6.

9 клас

1 (III). $43^{43} - 17^{17}$

43^1 закінчується		3	17^1 закінчується		7
43^2	–	9	17^2	–	9
43^3	–	7	17^3	–	3
43^4	–	1	17^4	–	1
період		4	період		4

$$43^{43} - 17^{17} = \underbrace{43^{410+3}}_{\text{зак-ся } 7} - \underbrace{17^{44+1}}_{\text{зак-ся } 7} = 0.$$

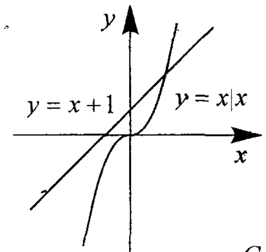
Остання цифра 0.

2 (III). $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2} = 0, \quad x \ge 2,$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2} = \sqrt{x-2};$$

$$\left|\sqrt{x-2}-1\right| = \sqrt{x-2}.$$

3 (III). $\underbrace{[x] + \{x\}}_{x} + 1 = x|x|$

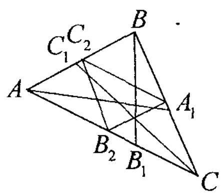


$x + 1 = x|x|$

$y = x + 1 \qquad y = x|x|$

Один розв'язок.

4 (III). Середня лінія $B_2C_2 \| BC$. Звідси випливає, що середина AA_1 лежить на відрізку B_2C_2. Середини BB_1 і CC_1 лежать на двох інших середніх лініях. Оскільки пряма не може перетинати три сторони трикутника у внутрішніх точках, то три утворені точки не можуть лежати на одній прямій.



5 (III). Завдання зводиться до розв'язування рівняння в цілих додатних числах

$$x^2 - y^2 = 124,$$
$$(x - y)(x + y) = 124.$$

Нехай (x, y) – розв'язки.

Якщо у x та y різна парність, тоді $(x - y)$ та $(x + y)$ – непарні, і їх добуток – непарний. Тому x та y мають однакову парність, тоді $(x - y)$ та $(x + y)$ – парні. Єдиний спосіб $2 \cdot 62 = 124$, $\begin{cases} x - y = 2; \\ x + y = 62, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 32; \\ y = 30. \end{cases}$

$32^2 = 1024$.

11 (III). Ні, не можна. Всі числа, які далі будуть записуватися на дошці, будуть ділитися на 3, а 1996 на 3 не ділиться.

12 (III). $t = x^2 + 2x$; $t^2 - 5t + 3 = 0$; $t_1 + t_2 = 5$,
$t_1 t_2 = 3$;

$x^2 + 2x - t_1 = 0; \quad x_1 + x_2 = -2; \quad x_1x_2 = -t_1;$

$$x^2 + 2x - t_2 = 0; \quad x_3 + x_4 = -2; \quad x_3x_4 = -t_2;$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 2t_1;$$
$$x_3^2 + x_4^2 = 4 + 2t_2;$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 8 + 2(t_1 + t_2) = 18.$$

Відповідь: сума квадратів коренів рівняння дорівнює 18.

13 (III). Видно, що $m \ge n+1$, тому $5n^2 \ge (n+1)! - n! = n \cdot n! = n^2(n-1)!$, $(n-1)! \le 5 < 3!$ $\; n < 4$. Розглядаючи рівність $5n^2 + n! = m!$ для $n = 1, 2, 3$ лише для $n = 1$ маємо в лівій частині цілого число $6 = 3!$.

Відповідь: $m = 3$, $n = 1$.

14 (III). Візьмемо на прямій дві довільні точки X та Y, намальовані одним кольором. Розглянемо також три точки: X_1 – образ точки X відносно Y; Y_1 – образ точки Y відносно X і O – середину відрізка XY. Якщо хоча б одна

$Y_1 \qquad X \quad O \quad Y \qquad X_1$

з цих точок помальована у той самий колір, що і точки X і Y, то вона разом з ними утворює шукану трійку точок. Якщо всі ці три точки помальовано в інший колір, то тоді вони будуть шуканою m.

15 (III). *Відповідь*: $\dfrac{|a-b|}{2}$.

16 (III). Вказане число ділиться на число $111111 = 111 \cdot 1001 = 37 \cdot 3 \cdot 1001$.

17 (III). Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику із сторонами BC; AC; AB відповідно. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1, такою ж буде і наша пряма, проведена з A_1. Вказані прямі будуть висотами трикутника $A_1B_1C_1$ і тому перетинатимуться в одній точці.

18 (III). Перемогу може забезпечити собі той, хто розпочинає гру. Першим ходом він закреслює 50-ту (центральну) клітинку, потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

19 (III). Кожній точці $(x; y)$ треба поставити у відповідність точку з координатами $x_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_1 = \dfrac{1}{y}$. Тоді повинна виконуватись рівність $ax_1 + by_1 = 1$, тобто точки лежать на прямій. Невеликим перебором знаходимо, що серед "перетворених" точок максимальна кількість точок, що лежать на одній прямій, – три.

20 (III). При вказаних діях не зміниться дискримінант тричлена, тому вказане перетворення зробити не можна.

21 (II). Беремо довільну точку кола B, проводимо січну AB, дугу AB ділимо на дві рівні частини, проводимо промінь AC і будуємо рівний $\angle BAC$. Це і є дотична.

25 (II). Розділимо дошку прямими на 8 прямокутників розміром 4×2. Другий гравець виграє, застосувавши таку стратегію: за будь-якого ходу першого гравця ставить коня на поле, що знаходиться в тому самому прямокутнику, куди його ставить перший.

26 (II). $(1+4x^2)(1+9y^2)-24xy=0;$

$1+4x^2+9y^2+36x^2y^2-12xy=0;$

$(1-6xy)^2+(2x-3y)^2=0;$

звідси $6xy=1;$

$2x-3y=0$, тобто $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$ або $x=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{3}$.

27 (II). Нехай $2268055=a$, тоді

$x=((a+1)(2a+1)(3a+1)+(a-1)(2a-1)(3a-1):((a-2)^2+(2a+1)^2)=$ $-(12a^3+12a):(5a^2+5)=2{,}4a$, тобто $x=5443332$.

28 (III). Розклавши суми кубів у другій рівності та скоротивши на $a+b=c+d$, отримаємо $(a+b)^2-ab=(c+d)^2-cd$, звідки $ab=cd$ та $(a-b)^2=$ $=(c-d)^2$. Тому $ab=\pm(c-d)$, звідки, враховуючи $(a+b)=(c+d)$, $a=c$, $b=d$ або $a=d$, $b=c$.

29 (III). Припустімо, що в комісії менше 60 членів. Кожний учасник комісії на засіданні зустрічав 9 інших учасників, і оскільки зустрічатися з кожним він міг не більше одного разу, то він відвідав не більше 6 засідань. Загальна кількість людино-відвідувань дорівнює 40×10 і оскільки на кожного учасника відвідувань не більше 6, то загальна кількість членів не менша $400:6>60$. Протиріччя.

30 (III). Рівняння зводиться до вигляду $(l-1)^2+(m+2)^2+(n-3)^2=3$, звідки $l-1=\pm1$, $m+2=\pm1$, $n-3=\pm1$, маємо вісім відповідей $(0;-1;2)$; $(0;-1;4)$; $(0;3;2)$; $(0;3;4)$; $(2;-1;2)$, $(2;-1;4)$; $(2;3;2)$, $(2,3;4)$.

31 (III). Підрахувавши кути, легко знаходимо, що $\angle AHB=60^0$, $\angle AOB=120^0$ і навколо точок A, H, B, O можна описати коло. У трикутниках AOM та BOM всі кути дорівнюють по 60^0, тому $MO=MA=MB$, тобто M – центр вказаного кола. Зокрема, $MH=MO$.

32 (III). У зв'язку з тим, що коефіцієнти додатні, корені – додатні та $t>0$, $T>0$. Оскільки t та T лежать між коренями, маємо $at^2-bt+c<0$, $AT^2-BT+c<0$, звідки $at+\frac{c}{t}<b$, $AT+\frac{C}{T}<B$, звідси

$$(b+B)^2>\left(\left(at+\frac{c}{t}\right)+\left(AT+\frac{C}{T}\right)\right)^2\geq4(at+AT)\left(\frac{c}{t}+\frac{C}{T}\right).$$

33 (III). $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1;$

$x^2-2x\sqrt{x^2-3x}+x^2-3x=1;$

$\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right)^2=1;$

$x-\sqrt{x^2-3x}=\pm1;$

$x^2\pm2x+1=x^2-3x;$

$3x\pm2x=-1;$

$x=-\frac{1}{5}$ або $x=-1$,

$x=-1$ – сторонній корінь.

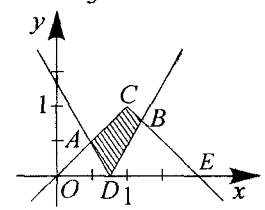
Відповідь: $x=-\frac{1}{5}$.

34 (III). Знайдемо точки перетину графіків. Для цього розв'яжемо рівняння $|2x-a|=1-|1-x|$. (1)

1) Якщо $x\leq\frac{a}{2}$, (1) має вигляд $a=-2x-x$, маємо $x=\frac{a}{3}$ – підходить.

2) Якщо $\frac{a}{2}<x<1$, (1) має вигляд $2x-a=x\Rightarrow$ $x=a$, але $a>1$, тому тут розв'язків немає.

3) Якщо $x>1$, (1) має вигляд $2x-a=2-x$, $x=\frac{a+2}{3}$.



Отже, графіки функцій мають дві спільні точки A та B:

$A(X_A,Y_A)=\left(\frac{a}{3};\ \frac{a}{3}\right)$, $B(X_B,Y_B)=\left(\frac{a+2}{3};\ \frac{4-a}{3}\right)$. Нехай C, D, E – точки з координатами $X_c=1$; $Y_c=1$; $X_D=\frac{a}{2}$; $Y_D=0$; $X_E=2$; $Y_E=0$ відповідно. Тоді

$$S_{ABCD}=S_{\Delta OCE}-S_{\Delta OAD}-S_{\Delta DBE}=1-\frac{1}{2}\cdot OD\cdot Y_A-\frac{1}{2}\cdot DE\cdot Y_B=$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{a}{2}\right)\frac{4-a}{3}=1-\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{12}(4-a)^2=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-a^2+4a-2\right)=\frac{1}{6}\left(2-(a-2)^2\right)<\frac{1}{3}.$$

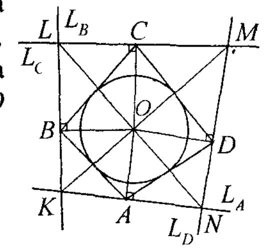
35 (III). $(a+b+c)^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac))$.

За умовою, $(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac))\,\vdots\,6$, тому $(a+b+c)^3\,\vdots\,6$.

$(a+b+c)^3-a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$.

Так як $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a=ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$ – парне число $6abc+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\,\vdots\,6$. Отже, $(ab+b+c)\,\vdots\,6$.

36 (III). а) Доведемо, що N, O і L лежать на даній прямій. Оскільки O – центр вписаного кола, OA, OB, OC, OD – бісектриси кутів чотирикутника $ABCD$. Чотирикутники $AKBO$, $BLCO$, $CMDO$ і $DNAO$ – вписані (протилежні кути прямі).



Отже, $\angle NOK+\angle KOL=180^0-\angle ONA-\angle OKA=$

$=180^0-\angle OKB-\angle OLB=$

$=180^0-\angle ADO-\angle ABO=180^0-\angle BAO-\angle BCO=$

$$=360^0-\left(\frac{\angle CDA}{2}+\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle DAB}{2}+\frac{\angle BCD}{2}\right)=360^0-\frac{360^0}{2}=180^0.$$

Отже, N, O, L – на одній прямій. Отже, KM і NL перетинаються в O.

б) Доведемо, що $KLMN$ – вписаний.

$$\angle NKL+\angle NML=\angle AKO+\angle OKB+\angle DMO+\angle OMC=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\angle ABC+\angle DAB+\angle BCD+\angle CDA\right)=180^0.$$

Отже, ΔNMO і ΔKLO – подібні; тому

$$\frac{ON}{OM}=\frac{OK}{OL};\frac{ON}{r}=\frac{p}{g}\Rightarrow ON=\frac{pr}{g}.$$

37 (III). Напишемо у кожній клітинці номер стовпчика, в'якому клітинка (якщо лічити зліва направо) зі знаком "+", якщо клітинка чорна і "–" – якщо біла. Сума чисел, написаних у клітинках і покритих плиткою доміно, рівна нулю, якщо плитка не горизонтальна, 1 – якщо горизонтальна і біло-чорна, –1 – якщо горизонтальна і чорно-біла. Сума всіх чисел на дошці – 0, отже чорно-білих стільки само, скільки й біло-чорних.

-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8

42 (III). Прирівнюючи ліві частини перших двох рівнянь, одержимо $x(y+1)=z(y+1)$, звідси $y=-1$ або $x=z$. Випадок $y=-1$ неможливий, тому що перше рівняння дає $-1=80$. Для $x=z$ з третього рівняння одержуємо $x=-10$ або $x=8$. Звідси, знаходимо y і z.

Відповідь: $(-10;\ -10;\ -10)$; $(8;\ 8;\ 8)$.

43 (III). Припустімо, що дана сума номерів для всіх вершин дорівнює $6n$. Додамо ці суми по всім 8 вершинам, тут число кожного ребра зустрінеться по два рази. Одержуємо рівність $8n=2(1+2+...+12)$. Права частина дорівнює 156, що неможливо при цілому n.

Відповідь: не можна.

44 (III). Піднесемо дане рівняння до квадрату, одержимо $m+2\sqrt{mn}+n=$ $=1994^2$. Тому $k=2\sqrt{mn}$ – ціле число. Підставимо $n=\frac{k^2}{4m}$ в дану рівність: $\sqrt{m}+\frac{k}{2\sqrt{m}}=\sqrt{1994}$, $2m+k=2\sqrt{1994m}$. Отже, число $1994m$ є повний квадрат. Але число $1994=2\cdot 997$ має прості множники тільки в першому степені, тому ці множники 2 і 997 повинні бути в m. Тому $m\geq 2\cdot 997=1994$, звідки $\sqrt{n}\leq 0$, що неможливо.

45 (III). Для $x=0$, $y=1$ з данної рівності маємо $f(-f(1))=0$. Підставивши в рівність $y=-f(1)$, приходимо до $f(x)=(1+f(1))=x$. Наша функція має $f(x)=b-x$ і підстановкою визначаємо, що $b=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{2}-x.$

46 (III). Із властивостей дотичної випливає, що кут між l і AB дорівнює $\angle ACB$. Із DE маємо $\angle ADE=\angle ACB$, за рівністю двох кутів трикутники

ABC і ADE подібні, причому $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$. Одержимо $\frac{6}{5}=\frac{12}{6+BD}$. Звідси, $BD=4$ см.

Відповідь: $BD=4$ см.

47 (II). Дане рівняння має корінь, якщо його дискримінант невід'ємний, тобто $(a\quad 1)^2+8a\quad 0\ (1)$. За умови (1), за теоремою Вієта $x_1+x_2=-1+a$; $x_1x_2=-2a$. Тоді сума квадратів коренів рівняння

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2+2a+1.$

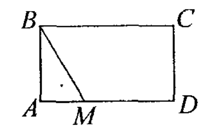
За умовою, $a^2+2a+1=9$. $a^2+2a-8=0$.

$a_1=-4$, $a_2=2$. Для $a=-4$ умова (1) не виконується.

Відповідь: $a=2$.

48 (II). *Відповідь:* 45.

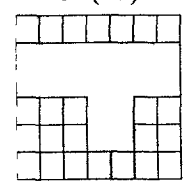
49 (II). $(1+4x^2)(1+9y^2)=24xy$; $1+4x^2+9y^2+36x^2y^2-12xy-12xy=0$. $(1-6xy)^2+(2x-3y)^2=0$; $6xy=1$; $2x-3y=0$, тобто $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ або $x=\ \frac{1}{2}$, $y=\ \frac{1}{3}$.



53 (II). $AM=\frac{BM}{2}$; $ABM=30^0$, $AMB=60^0$.

Відповідь: 60^0.

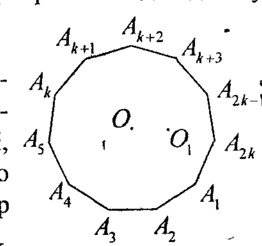
64 (IV). Виграє той, хто починає. Справді, виділимо одну із клітинок, а решту дошки розіб'ємо на частини розміром 1 2 (наприклад, так, як зображено на малюнку). Той, хто починає, першу фішку ставить у виділену клітинку, а кожну наступну – у вільну клітинку тієї частини 2 1, у яку попереднім ходом поставив свою фішку інший гравець. Очевидно, що це завжди можна зробити.



65 (IV). $2p+1=m^n$ $\quad m=2k+1$ $\quad 2p=2k\ A$,

де $A>1$ $\quad k=1$ $\quad m=3$ $\quad p=\frac{3^n\ 1}{2}=\frac{3^n\ 1}{3\ 1}=3^{n\ 1}+3^{n\ 2}+...+3+1.$

Якщо n – парне, то $3^{n\ 1}+3^{n\ 2}+...+3+1$ ділиться на 2, тому p – непарне. Якщо $n=3$, то $p=13$. Якщо $n=5$, то $p=121$ – не просте, якщо $n=7$, то $p=1093>1000$. (Зауваження. Можна просто перебрати n від 2 до 7 у співвідношенні $p=\frac{3^n\ 1}{2}$).



66 (IV). Можна довести більш загальне твердження: кожний центральносиметричний опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми. Справді, нехай $A_1A_2...A_{2k}$ – такий многокутник (очевидно, що кількість вершин повинна бути парною), і O – центр його симетрії. Зокрема, $A_iO=AO_{i+k}$ для $i=1, 2, ..., k$.

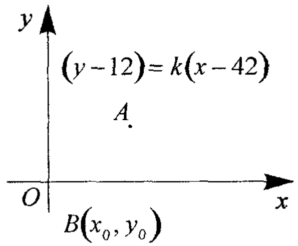
Відкладемо вектори $A_3B_3=A_4B_4=\ ...\ =A_kB_k=A_2A_1=A_{k+1}A_{k+2}$. Одержуємо $k-1$ паралелограмів $A_1A_2A_3B_3$, $B_3A_3A_4B_4 \ldots$, $B_kA_kA_{k+1}A_{k+2}$ і $(2k-2)$ – кутник $A_1B_3B_4 \ldots B_kA_{k+2}A_{k+3}A_{2k}$ точка O_1, така, що $\vec{OO_1}=\frac{1}{2}\vec{A_2A_1}$ буде центром симетрії цього $(2k-2)$-кутника, оскільки

$$\vec{B_iO_1}=\vec{B_iA_1}+\vec{A_iO}+\vec{OO_1}=\vec{A_iO}+\frac{1}{2}\vec{A_2A_1}=\vec{OA_{k+i}}+\frac{1}{2}\vec{A_2A_1}=\vec{OA_{k+i}}+\vec{O_1O}=\vec{O_1A_{k+i}}.$$

і, аналогічно, $\vec{A_1O_1}=\vec{O_1A_{k+2}}$.

Тепер цю процедуру треба повторювати до тих пір, доки не залишиться центральносиметричний 4-кутник, тобто паралелограм.

67 (IV). Розглянемо довільну пряму $(y-12)=k(x-42)$ (1) (з раціональним коефіцієнтом k, яка проходить через точку A (див. мал.). Для знаходження абсциси x_0, точки $B(x_0, y_0)$ отримуємо рівняння $x_0^2+2x_0+(k(x_0-42)+12)^2=1992$, яке після очевидних перетворень набуває вигляду $ax_0^2+bx_0+c=0$ із раціональними a, b, c. Один із коренів – $\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ цього рівняння співпадає із



числом 42, тому число $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ – раціональне. Але тоді і другий корінь рівняння буде раціональним числом. Ордината $y_0=k(x_0-42)+12$ точки $B(x_0, y_0)$ також, очевидно, є раціональним числом. Зауважимо тепер, що через точку A можна провести безліч прямих вигляду (1) із раціональним коефіцієнтом k.

68 (IV). Відповідь однакова.

Взаємно однозначна відповідність: трикутнику із сторонами x, y, z, де $x+y+z=1993$, відповідає трикутник із сторонами:

$x+1$, $y+1$, $z+1$, $(x+1)+(y+1)+(z+1)=1996$.

69 (IV). $ac+\frac{c}{c-1}=a(c-1)+\frac{1}{c-1}+a+1\geq 2\sqrt{a}+a+1=\left(\sqrt{a}+1\right)^2\geq b$.

За нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним.

70 (IV). Нехай M, L, N, K – середини сторін AB, BC, CD, DA відповідно, $Q=KM\cap AC$, $P=MN\cap AC$, $E=BD\cap AC$, $MLNK$ – паралелограм. $MP=PN$, $QP\|KN$, тому QP – середня лінія в трикутнику KMN, звідси $MQ=QK$. Трикутники AMQ і ABE подібні; AQK і AED – також. Звідси $EB=2QM=2QK=ED$, E – середина BD.

71 (IV). *Відповідь*: безліч.

(1; 1) – розв'язок.

Якщо (p, q) – розв'язок, то $(8p^2, 4qx+2q)$ – теж розв'язок, причому $8p^2>p$.

72 (IV). а) $n=5k$, $\left[\frac{n^2}{5}\right]=5k^2$ просте $\Leftrightarrow k=1$, $n=5$;

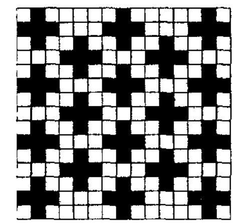
б) $n=5k\pm1$, $\left[\frac{n^2}{5}\right]=5k^2\pm 2k=k(5k\pm2)$ просте $\Leftrightarrow k=1$, $n=4$, $n=6$;

в) $n=5k\pm2$, $\left[\frac{n^2}{5}\right]=5k^2\pm4k=k(5k\pm2)$ просте $\Leftrightarrow k=1$, $n\in\{1, 9\}$ – тут простих не буває.

Відповідь: $n\in\{4, 5, 6\}$.

73 (IV). Легко бачити, що $\angle A_1MA_2=\angle PA_1M+\angle PA_2M$, звідси $\angle A_1MA_2==\angle A_1MA_2=180^0-\frac{1}{2}\angle A_1PA_2$. Кут A_1MA_2 – тупий, тому звідси випливає, що $\angle A_1OA_2=\angle A_1PA_2$, де O – центр кола, описаного навколо трикутника A_1MA_2. Це доводить, що A_1, A_2, P, O лежать на одному колі.

74 (IV). На малюнку зафарбовано $499665=331935$ хрестів. Якщо вони випиляні, то більше випиляти не можна. Кожний хрест на дошці перетинає рівно один з зафарбованих.



Тому відповіді:

а) можна,

б) не завжди.

75 (IV). $\frac{a^3}{b+2c}+\frac{(b+2c)a}{9}\geq\frac{2}{3}a^2$ за нерівністю Коші. Відповідно ще дві такі нерівності. Додавши почленно, отримаємо

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Враховуючи, що $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, отримаємо нерівність, яка доводиться.

80 (IV). Перший має взяти яблуко масою 250 г і тоді або бере яблуко 600 г і з'їдає в сумі 850 г, або (якщо другий взяв яблуко 600 г) з'їсть яблука масою 300 г, потім 400 г і всього з'їсть 950 г. Всі інші ходи дадуть меншу суму, оскільки другий тоді може скористатися описаним алгоритмом і з'їсти щонайменше 850 г, залишивши першому не більше 700 г.

81 (IV). Дана рівність перетворюється на $(2^x-3^x)^2+(2^x-1)^2+(3^x-1)^2=0$, звідки $x=0$.

82 (IV). Проведемо перпендикуляри CT' та AS' до прямої l. Оскільки $AD=DC$, $\angle TDC=\angle ADS$, то $\Delta DT'C=\Delta DS'A$, отже $T'C=AS'$. В ΔMBN $BM=BN$, тому $\angle BMN=\angle BNM$, отже $\angle ASS'=\angle BMN=\angle BNM=\angle CTT'$, звідки $\Delta ASS'=\Delta CTT'$. Тому $AS=TC$. Отже $BS+BT=AB+BC$.

Тому $AS=TC=\frac{|AB-BC|}{2}$, $AK=\frac{AB+AC-BC}{2}$, $AD=\frac{AC}{2}$.

Звідки $KD=\frac{|AB-BC|}{2}=AS=TC$.

83 (IV). Доводимо індукцією по n, що для кожного n існує таке a_n, що кожне з чисел a_n, $2a_n$, na_n є степенем. При $n=1$ можна взяти $a_1=4$. Припустімо, ми знайшли $a_{n\ 1}$ таке, що й $a_{n\ 1}=m_i^{k_i}$, $1\leq i\leq n-1$.

Нехай $k = HCK\,(k_1, k_2, ..., k_{n-1})$ Покладемо $a_n = a_{n-1}(na_{n-1})^k$. Тоді

$$ia_n = ia_{n-1}(na_{n-1})^k = m_i^{k_1}(na_{n-1})^k = \left(m\,(na_{n-1})^{\frac{k}{k_1}}\right)^{k_1},$$

$$na_n = na_{n-1}(na_{n-1})^k = (na_{n-1})^{k+1}.$$

84 (IV). Нехай $19m_1 + 97n_1 = 19m_2 + 97n_2$, $m_1 > m_2$. Тоді $19(m_1 - m_2) = 97(n_2 - n_1)$. Числа 19 та 97 – прості, тому $m_1 - m_2$ ділиться на 97, $m_1 - m_2 \geq 97$, $m_1 \geq 98$. Тому $19m_1 + 97n_1 \geq 19 \cdot 98 + 97 = 1959$.

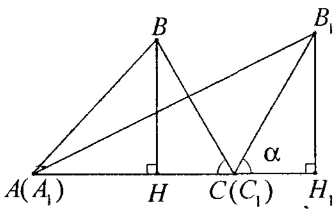
Але $1959 = 19 \cdot 98 + 97 \cdot 1 = 19 \cdot 1 + 97 \cdot 20$.

Відповідь: 1959.

85 (IV). Пронумеруємо рядки та стовпчики натуральними числами, починаючи від 1 звичайним чином. Додамо всі числа в парних рядках, а до отриманої суми додамо всі числа в непарних стовпчиках. Тоді білі клітини враховуватимуться парну кількість разів (0 або 2); а чорні – непарну (по 1). Отримана сума, за умовою задачі, парна, отже, сума чисел у чорних клітинах парна.

86 (IV). Перший доданок лівої частини менший 2, а другий – менший 3 (ці твердження доводимо індукцією по n)

87 (IV). Сумістимо трикутники, як на малюнку. Нехай $\angle ACB = \alpha$.



Тоді $\Delta BHC = \Delta B_1H_1C_1$, $\angle B_1C_1H_1 = \alpha$,

$AB^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha$,

$A_1B_1^{\ 2} = b^2 + a^2 + 2ab\cos\alpha$.

Звідси $AB^2 + A_1B_1^{\ 2} = 2(a^2 + b^2)$. За нерівністю Коші-Буняковського

$$a \cdot AB + b \cdot A_1B_1 \leq \sqrt{(a^2+b^2)(AB^2 + A_1B_1^{\ 2})} = \sqrt{2}(a^2+b^2).$$

10 клас

1 (II). Нехай $4x + 3y$ ділиться на 5, тоді $2(4x + 3y) = 8x + 6y$ також ділиться на 5. $2x - y = 10x + 5y - (8x + 6y) = 5(2x + y) - 2(4x + 3y)$. Оскільки $5(2x + y)$ і $2(4x + 3y)$ діляться на 5, то і різниця їх ділиться на 5 (3 ознака подібності).

2 (II). Дане рівняння рівносильне сукупності двох систем:

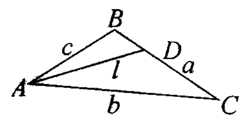
$$\begin{cases}\cos x = 1;\\ \cos 7x = 1,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}\cos x = -1;\\ \cos 7x = -1\end{cases} \text{ з яких одержимо:}$$

$$\begin{cases}x = 2k\pi;\\ x = \dfrac{2n\pi}{7},\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi;\\ x = \dfrac{\pi + 2n\pi}{7} = \dfrac{2n+1}{7}\pi,\end{cases} \quad k, n \in Z.$$

Тоді для першої системи одержимо $2k\pi = \dfrac{2n\pi}{7}$, а для другої $\pi + 2k\pi = \dfrac{\pi + 2n\pi}{7}$. Після скорочення на π першої системи одержимо $k = \dfrac{n}{7}$, а другої – $k = \dfrac{n-3}{7}$. У кожному випадку підбираємо такі цілі значення n, щоб одержати ціле значення k. Для першої системи $n = 7m$, $m \in Z$, для другої $n = 7l + 3$, $l \in Z$.

Відповідь: $x = 2\pi m$ або $x = \pi + 2\pi l = \pi(2l + 1)$, $l \in Z$.

3 (II). $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} \Rightarrow \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}cl\sin\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{2}bl\sin\dfrac{A}{2}$.



Враховуючи, що $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ з попередньої рівності одержимо:

$$bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}cl\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{A}{2}.$$

Звідки $bc\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}l(b+c)$. Тоді $l = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$.

4 (II). Нехай $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ послідовні натуральні числа. Розглянемо $S = (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. S ділиться на 5. Для того, щоб S було повним квадратом, $n^2 + 2$ повинно ділитися на 5. Воно ділилося б на 5, якби n^2 закінчувалося на 3 або на 8. А це не можливо. Отже, S не є повним квадратом.

5 (II). Оскільки $x \neq 0$, $y \neq 0$, $p \neq 0$, то дана система рівносильна системі:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{12};\\ \dfrac{x+p}{xp} = \dfrac{1}{15};\\ \dfrac{y+p}{yp} = \dfrac{1}{20},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12};\\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{15};\\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{20},\end{cases}$$

Якщо всі рівняння додати, то одержимо систему, рівносильну даній.

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{1}{10};\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{p}=\frac{1}{15};\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{1}{20},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{10}-\frac{1}{15};\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{p}=\frac{1}{15};\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{1}{20},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{30};\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{p}=\frac{1}{15};\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{p}=\frac{1}{20}.\end{cases}$$

Отже, $y = 30$. Тоді $\frac{1}{p}=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$, звідки $p = 60$. $\frac{1}{x}=\frac{1}{15}-\frac{1}{60}=\frac{1}{20}$.

Відповідь: $x = 20$, $y = 30$, $p = 60$.

6 (II). $126 = 5\cdot 25+1$. Розіб'ємо квадрат зі стороною 1 на 25 рівних квадратів із стороною $\frac{1}{5}$. Тоді знайдеться один з квадратів, у який попаде не менше 6 точок, бо $126 > 5\cdot 25$. Круг, описаний навколо цього квадратика, містить не менше 6 точок і має радіус $r=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{1}{\sqrt{50}}<\frac{1}{\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$.

7 (II). $\mathrm{tg}20^0\,\mathrm{tg}40^0\,\mathrm{tg}60^0\,\mathrm{tg}80^0=\sqrt{3}\mathrm{tg}20^0\,\mathrm{tg}40^0\,\mathrm{tg}80^0=$

$$=\sqrt{3}\frac{\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0}{\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}=\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{8}}=3.$$

Обчислимо чисельник і знаменник:

$$\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0=\sin 80^0\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(40^0-20^0\right)-\cos\left(40^0+20^0\right)\right)=$$

$$=\sin 80^0\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 20^0-\cos 60^0\right)=\frac{1}{2}\left(\sin 80^0\cos 20^0-\frac{1}{2}\sin 80^0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sin 100^0+\sin 60^0\right)-\frac{1}{2}\sin 80^0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 100^0+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\sin 80^0\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin 80^0+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 80^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0=\frac{2\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}{2\sin 20^0}=$$

$$=\frac{\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^0}{2\sin 20^0}=\frac{\sin 80^0\cos 80^0}{4\sin 20^0}=\frac{\sin 160^0}{8\sin 20^0}=\frac{1}{8}.$$

8 (II). $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(\frac{11}{2}\right)^2-2\cdot\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}}=\frac{69}{26}.$

За теоремою Вієта з рівняння знайдемо:

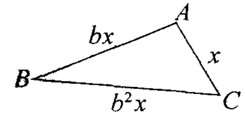
$$x_1+x_2=\frac{11}{2};\ x_1x_2=\frac{13}{2}.$$

Перевіряємо, чи дійсно дане рівняння має 2 корені:

$$D=\left(-11\right)^2-4\cdot 2\cdot 13=17>0.$$

Відповідь: $\frac{69}{26}$.

9 (II). Нехай $AC = x$, якщо $b=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$, тоді $AB = bx$, $BC = b^2x$.



Проти більшої сторони BC лежить більший кут, тоді за теоремою косинусів:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\ \ AB\cdot\cos\angle BAC,$$

$x^2b^4=x^2+x^2b^2-2x^2b\cos\angle BAC$ або $b^4=1+b^2-2b\cos\angle BAC$,

звідки $\cos\angle BAC=\frac{b^2+1-b^4}{2b}$. Тепер замість b залишилось підставити його значення. Спочатку обчислимо чисельник:

$$b^2+1-b^4=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1-\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4}=\frac{2\sqrt{5}+2+4-5-2\sqrt{5}-1}{4}=0.$$

Отже, $\cos\angle BAC=0$, тобто $\angle BAC=90^0$.

10 (II). Область визначення даної функції визначається системою нерівностей $\begin{cases}x-\sqrt{x+2}\ge 0;\\ x+2\ge 0,\end{cases}$ яка рівносильна системі: $\begin{cases}x\ge 0;\\ x^2-x-2\ge 0.\end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, одержимо $x\ge 2$.

11 (III). $5x^2+2x+3=5\left(x^2+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right)=5\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{25}+\frac{3}{5}\right)=$

$$=5\left[\left(x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\right)+\frac{14}{25}\right]=5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{25}\right]=5\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\ge\frac{14}{5}>2.$$

Тоді одержимо нерівність $2\sin x>2$, яка невірна. Отже, рівняння розв'язків немає.

12 (III). $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\sin 2x}{2};$

$$\left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2=a\left(1+\sin 2x\right).$$

На $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ $1+\sin 2x\ne 0$. Тому попереднє рівняння рівносильне рівнянню:

$$1+\sin 2x=4a\Leftrightarrow\sin 2x=4a-1.$$

Розглянемо випадки:

1) $0 \le 4a-1<1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le a < \frac{1}{2}$.

Рівняння має два розв'язки:

$x_1 = \frac{1}{2}\arcsin(4a-1)$,

$x_2 = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin(4a-1))$;

2) $4a-1=1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Рівняння має один розв'язок: $x = \frac{\pi}{4}$.

3) $a > \frac{1}{2}$.

Рівняння розв'язків не має.

13 (III). $x^4+1-2x^2\sin y = 0$;

$x^4 - 2x^2 \sin y + \sin^2 y + \cos^2 y = 0$;

$\left(x^2 - \sin y\right)^2 + \cos^2 y = 0$.

З цього рівняння випливає, що кожен доданок **повинен бути рівний 0.**

1) $\cos^2 y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

2) $x^2 - \sin y = 0 \Rightarrow x^2 = \sin y$,

$\sin y = \pm 1$,

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1; \\ x^2 = -1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1; \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$

Відповідь: $x = \pm 1,\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

14 (III). $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-4) =$
$= n(n-1)(n+1)(n+2)(n-2) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$.

Маємо добуток п'яти послідовних натуральних чисел. Такий добуток ділиться на $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

15 (III). $30^n + 4^n(3^n - 2^n) - 1 = 30^n + 12^n - 8^n - 1 = (30^n - 8^n) + (12^n - 1^n) =$ $= (30-8)(30^{n-1} + \ldots + 8^{n-1}) + (12-1)(12^{n-1} + \ldots + 1)$. Перші множники в обох доданках діляться на 11, тому обидва доданки діляться на 11 Отже, ліва частина ділиться на 11.

16 (III). Перетворимо перше число

$(a+1)^{2n-1} + a^{n+2} = (a+1)^{2n+1} + a^{n+2} + a^{2(2n-1)} - a^{2(2n+1)} = (a+1)^{2n+1} + a^{2(2n+1)} -$ $- (a^{2(2n+1)} - a^{n+2}) = [(a+1)^{2n+1} + a^{2(2n-1)}] - a^{n+2}[(a^3)^n - 1] = (a+1+a^2)[(a+1)^{2n} +$ $+ \ldots + (a^2)^{2n}] - a^{n+2}(a-1)(a^2+a+1)\ [(a^3)^{n-1} + \ldots] = (a^2+a+1)\ [\ldots]$.

17 (III). Введемо позначення: $x - y = a,\ y - z = b,\ z - x = c$.

Тоді $a + b + c = 0$, звідси $c = -(a+b)$.

$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = a^5 + b^5 + c^5 = a^5 + b^5 - (a+b)^5 = a^5 + b^5 - a^5 -$ $- 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5 = -5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 =$ $-5ab(a+b)(a^2+b^2+ab) = 5abc(a^2+ab+b^2) = 5(x-y)(y-z)(z-x)(a^2+ab+$ $+ b^2) \vdots 5(x-y)(y-z)(z-x)$.

18 (III). $9^n\left(9^n+1\right)+1 = 9^{2n} + 9^n + 1 = \left(9^{2n} + 2\cdot 9^n + 1\right) - 9^n = \left(9^n+1\right)^2 - 9^n =$
$= \left(9^n + 1 - 3^n\right)\left(9^n + 1 + 3^n\right) = \left[3^n\left(3^n+1\right)+1\right]\left(9^n - 3^n + 1\right) \vdots \left[3^n\left(3^n+1\right)+1\right]$.

20 (III). $3^{105} + 4^{105} = \left(3^3\right)^{35} + \left(4^3\right)^{35} = \left(3^3 + 4^3\right)\left[\left(3^3\right)^{34} + \ \ldots\ + \left(4^3\right)^{34}\right]$.

$3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91 \div 13 \Rightarrow$ права частина рівності ділиться на 13. **Отже,** $3^{105} + 4^{105}$ ділиться на 13.

21 (III). Використаємо наступну нерівність:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}\ :\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Перепишемо ліву частину нерівності, враховуючи **попередні нерівність і рівність:**

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \ldots\ + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ \ldots\ + \ \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ \ldots\ + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Отже, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ \ldots\ + \frac{1}{n^2} < 1$.

22 (III).

Де $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 = \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha =$
$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha$.

Тоді нерівність набуде вигляду:

$$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 2\alpha + 4\cos^2 2\alpha \ge 1.$$

Остання нерівність очевидна.

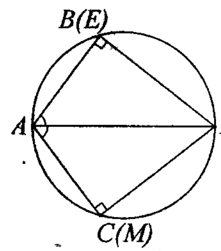
23 (III). Потрібно розглядати три випадки:

1) точка E співпадає з точкою B;

2) кут B – гострий;

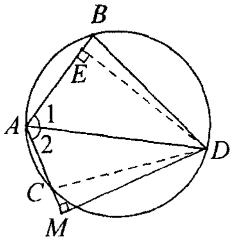
3) кут B – тупий.

1) Точка E співпадає з точкою B. Опустимо перпендикуляр DM на AC. Чотирикутник $ABCD$ – вписаний, тому сума величин протилежних кутів рівна 180^0. Якщо точка E співпадає з точкою B, то кут $B =$ $= 90^0$, отже і кут $C = 90^0$. Тому $\Delta ABD = \Delta CAD$ і $AE = 0{,}5(AB + AC)$.



Мал. *а*)

2) Нехай кут B – гострий. Тоді кут ACD тупий і точка M лежить на продовженні сторони AC, а точка E – на стороні AB, як показано на мал. *б*). $\Delta ADE = \Delta ADM$ за гіпотенузою і гострим кутом: AD – спільна, $\angle 1 < \angle 2$, бо AD – бісектриса. Тому $AE = AM$; $DE = DM$. За умовою, AD – бісектриса, отже $\cup BD = \cup DC$ і $BD = DC$. Тоді $\Delta BED = \Delta CMD$ (за катетом і гіпотенузою) $\Rightarrow BE = CM$, тобто справедливі співвідношення:

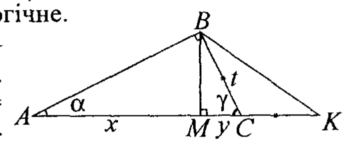


Мал. *б*)

$AE = AB - BE = AB - CM$, $AE = AM = AC + CM$. Додавши ці рівності, одержимо: $2AE = AB + AC \Rightarrow AE = 0{,}5(AB + BC)$.

3) Коли кут β тупий, то доведення аналогічне.

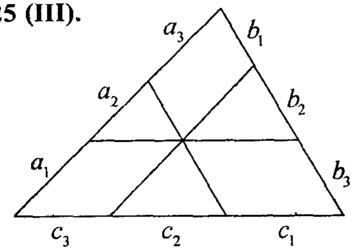
24 (III). За умовою, $\angle ABC = 90^0$, $AM - MC = BC$. Позначимо $AM = x$, $MC = y$, $BC = t$. Продовжимо сторону AC і побудуємо $CK = BC = t$. За умовою, $x = y + t$; $MK = y + t$ (за побудовою). Отже, $AM = MK$ і $\Delta AMB = \Delta KMB$ (за I ознакою рівності трикутників). Тому $AB = BK$, $\angle K = \alpha$, ΔBCK – рівнобедрений. Отже, $\angle CKB = \angle CBK = \alpha$ і $\gamma = 2\alpha$ (зовнішній кут трикутника).



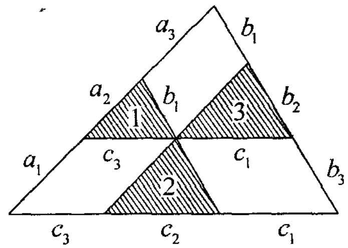
З ΔABC: $\alpha + \gamma + \angle ABC = 180^0$, $\alpha + \gamma = 90^0$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

Відповідь: $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

25 (III).



Мал. *а*)



Мал. *б*)

Розглянемо заштриховані трикутники на мал. 3 *б*). Всі вони подібні. Тому можна записати співвідношення:

$$\Delta 1 \sim \Delta 2:\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_3}{b_1} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 b_1}{b_3}, \qquad (1)$$

$$\Delta 1 \sim \Delta 3:\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{c_3}{c_1} \Rightarrow a_2 = \frac{c_3 a_3}{c_1}, \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{a_1 b_1}{b_3} = \frac{c_3 a_3}{c_1} \Rightarrow a_1 b_1 c_1 = a_3 b_3 c_3, \qquad (4)$$

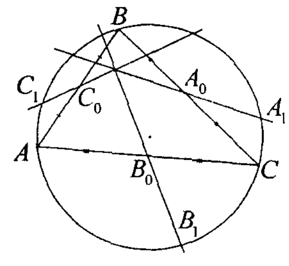
$$\Delta 3 \sim \Delta 1:\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2 b_2}{b_1}, \qquad (5)$$

$$\Delta 3 \sim \Delta 2:\ \frac{a_3}{a_1} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow a_3 = \frac{a_1 c_1}{c_2}, \qquad (6)$$

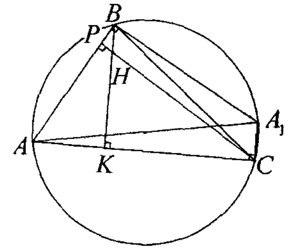
$$(5),(6) \Rightarrow a_2 b_2 c_2 = a_1 b_1 c_1, \qquad (7)$$

$(4),(7) \Rightarrow a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3$, що і потрібно було довести.

26 (III).



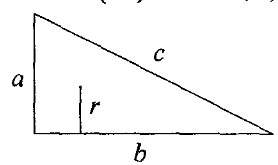
Мал. *а*)



Мал. *б*)

Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC. Розглянемо чотирикутник $CHBA_1$. AA_1 – діаметр; отже, $\angle ABA_1 = 90^0$, $\angle ACA_1 = 90^0$ (як вписані кути, що спираються на діаметр). Отже, $BK \| CA_1$, $CP \| A_1B$. Тоді $CHBA_1$ – паралелограм. За умовою A_0 – середина BC, яка є діагоналлю цього паралелограма. Отже, A_1A_0 проходить через т. H. Аналогічно можна переконатись, що через H проходять B_1B_0 і C_1C_0. Отже, всі три прямі A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 перетинаються в одній точці. H – ортоцентр трикутника ABC.

27 (III). Нехай a, b, c – сторони трикутника. Причому $b = a + d$, $c = a + 2d$ (d – різниця прогресії). $S = pr$ (r – радіус вписаного кола, p – півпериметр). З іншого боку, $S = \frac{1}{2}ab$. Тому



$$pr = \frac{1}{2}ab \Leftrightarrow r\frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}ab \Leftrightarrow r(a+b+c) = ab.$$

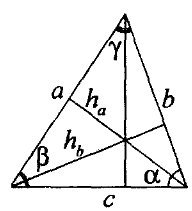
$$r(a + a + d + a + 2d) = a(a+d);\ 3r(a+d) = a(a+d) \Leftrightarrow 3r = a \Rightarrow a = 3r.$$

Для прямокутного трикутника

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+a+d-a-2d}{2} = \frac{a-d}{2} \Rightarrow a = 2r + d.$$

Тоді з $a = 3r$ одержимо $2r + d = 32 \Rightarrow d = r$, що і потрібно було довести.

28 (III). За умовою задачі: h_a, h_b:



$$h_a \geq a;\ h_b \geq b.\ S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

За умовою $a \leq h_a \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}ab\sin\gamma \geq \frac{1}{2}a^2$,

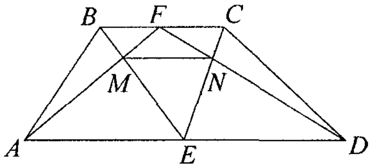
$b \leq h_b \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}b^2 \Rightarrow \frac{1}{2}ab\sin\gamma \geq \frac{1}{2}b^2$.

Отже, $\sin\gamma \geq \frac{a}{b}$, $\sin\gamma \geq \frac{b}{a}$.

Тому $\sin\gamma \geq \frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, звідки $a = b$ і $\gamma = 90^0$. Це означає, що трикутник ABC рівнобедрений прямокутний.

Відповідь: $\alpha = \beta = 45^0$, $\gamma = 90^0$.

29 (III). За умовою, $BC = a$, $AD = 3a$. Потрібно знайти MN.



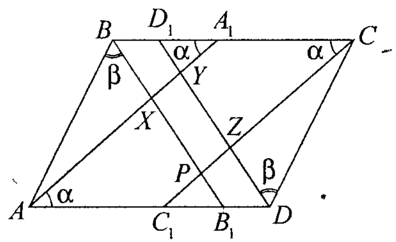
Трикутники BMF і AME подібні (відповідні кути трикутників рівні).

Трикутники CNF і END також подібні. Тому виконуються співвідношення:

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AM}{MF} = \frac{EM}{MB} \text{ і } \frac{ED}{FC} = \frac{EN}{NC} = \frac{DN}{NF}.$$

За умовою, точки F і E – середини сторін BC і AD. Тому $AE = ED$, $BF = FC$ і $\frac{AE}{BF} = \frac{ED}{FC} = \frac{3/2\,a}{1/2\,a} = 3$. Тоді $\frac{AM}{MF} = \frac{EM}{MB} = \frac{EN}{NC} = \frac{DN}{NF} = 3$. Отже, $FN = \frac{1}{4}FD$, $FM = \frac{1}{4}AF$, кут AFD – спільний для трикутників MFN і AKD. З останніх співвідношень випливає, що ΔMFN і ΔAFD подібні (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $\frac{MN}{AD} = \frac{1}{4}$ і $MN = \frac{AD}{4} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{4}a$.

Отже, віддаль MN рівна $\frac{3}{4}a$.



30 (III). AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – бісектриса кутів A, B, C, D відповідно. Бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні: $AA_1 \| CC_1$, $BB_1 \| DD_1$. При перетині бісектрис утворився чотирикутник $XYZP$ – паралелограм. Розглянемо ΔAXB і обчислимо кут AXB.

$$\alpha + \beta + \angle AXB = 180^0;\ BC \parallel AD \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^0 \Rightarrow$$
$$\alpha + \beta = 90^0 = \angle AXB = 180^0 - (\alpha + \beta) = 90^0.$$

У паралелограмі $XYZP$ один кут прямий, тому він є прямокутником.

За умовою задачі, у прямокутник можна вписати коло. Єдиним прямокутником, у який можна вписати коло, є квадрат. Тому $XYZP$ – квадрат і $XY = YZ$. Нехай $BC = a$, $AB = b$. $\Delta\ BPC$ – прямокутний: $BP = a\sin\alpha$, $PC = a\cos\alpha$; $\Delta\ CZD$ – прямокутний – $CZ = b\cos\alpha$, $ZD = b\sin\alpha$. Справедливі співвідношення: $BP - ZD = XP (XP = PZ)$, $PC - ZC = PZ$. Звідси $BP - ZD = PC - ZC$, або

$$a\sin\alpha - b\sin\alpha = a\cos\alpha - b\cos\alpha \Leftrightarrow (a-b)\sin\alpha = (a-b)\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 45^0,\ \angle BAD = 2\alpha = 90^0.$$

Отже, кут паралелограма $ABCD$ рівний 90^0, тому $ABCD$ – прямокутник.

51 (III). $d_1^2 = AB^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\alpha$,

$$d_2^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos\alpha.$$

Почленно віднявши ці рівності, одержимо:

$$d_1^2 - d_2^2 = 4AD \cdot AB \cdot \cos\alpha;$$
$$AD \cdot AB = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha};\ S = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right)\mathrm{tg}\,\alpha.$$

52 (III). Проведемо заміну $x + 5 = y$, тоді одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} = y; \\ y = x^2 - 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = y^2; \\ x^2 - 5 = y. \end{cases}$$

Почленно додамо ці рівняння, одержимо:

$$y^2 + y = x + x^2;\ y - x + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y - x + (y - x)(y + x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y - x)(1 + y + x) = 0.$$

Далі розв'язуємо систему:

а. $\begin{cases} y - x = 0; \\ x^2 - 5 = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x; \\ x^2 - 5 = x, \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2};$

б. $\begin{cases} y + x + 1 = 0; \\ x^2 - 5 = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1; \\ x^2 - 5 = -x - 1, \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$

Перевіримо виконання умови $x^2 - 5 = 0$. Знаходимо, що корені $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ сторонні.

Відповідь: $\frac{1 + \sqrt{21}}{2}$, $x = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

53 (III). $\sin x - \cos x = y;\ 1 - \sin 2x = y^2;\ \sin 2x = 1 - y^2;$

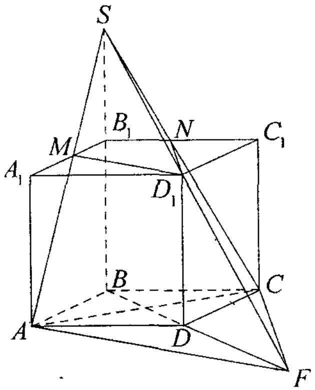
$$1 - y^2 = 4(y - 1);\ (1 - y)(1 + y) + 4(1 - y) = 0;\ 1 - y = 0;\ y = 1; \text{ або}$$
$$y + 5 = 0;\ y = -5.$$
$$\sin x - \cos x = 1;\ \sin x = 1 + \cos x;$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2};\ \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = 0;$$
$$\cos\frac{x}{2} = -5;\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1);\ x = \pi(2n+1);\ \text{або}$$
$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0;\ \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1;\ \frac{x}{2} = \pi k + \frac{\pi}{4};\ x = 2\pi k + \frac{\pi}{2},$$
$$\sin x - \cos x = -5;\ \text{(розв'язків немає).}$$
$$y = -5 - 6x - x^2 = 4 - (x + 3)^2;\ y_{max} = 4 \text{ при } x = -3.$$

Із всіх коренів ближче до -3 є $-\pi$.

55 (III). Нехай a, b, c – сторони, тоді

$$b = a + d,\ c = a + 2d,\ c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 + 2ad + d^2,$$
$$c^2 = (a + 2d)^2 = a^2 + 4ad + 4d^2 \Rightarrow a^2 = 2ad + 3d^2 \Rightarrow a = 3d;\ b = 4d;\ c = 5d;$$

$$r=\frac{S}{\dfrac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{12d^2}{12d}=d.$$



57 (III). Знайдемо лінію перетину площин AD_1M і CD_1N. Оскільки – точка перетину AM і CN, то дані площини, маючи дві спільні точки S і D_1, перетнуться по прямій SD_1, яка перетне площину $ABCD$ у точці F. Легко показати, що $\frac{SA}{AM}=\frac{AE}{D_1M}=\frac{SC}{CN}=\frac{CF}{ND_1}=\frac{SF}{SD_1}=2$. Оскільки $AM=D_1M=CN=D_1N$, то трикутники SAF і SCF є рівнобедреними. У них медіани AD_1 і CD_1 є висотами. Отже, $AD_1 \perp SF$ і $CD_1 \perp SF$; AD_1C є лінійним кутом цього двогранного кута, який дорівнює 60^0.

58 (III). Якщо n – парне, то n^2 – парне, а тому остання цифра n^2 – парна. Якщо – непарна, то воно має вигляд $10a\pm1$, $10a\pm3$, $10a\pm5$.

Підносимо до квадрату:

$$(10a\pm1)^2=100a^2\pm20a+1,$$
$$(10a\pm3)^2=100a^2\pm60a+9,$$
$$(10a\pm5)^2=100a^2\pm100a+25.$$

В останньому випадку друга від кінця цифра – у двох перших вона є або останньою цифрою m-ного числа $2a(6-a)$, або десять мінус ця цифра, тобто також є парною.

59 (III). $x^2-5x-4\sqrt{x}+13=(x-3)^2+\left(\sqrt{x}-2\right)^2=0$, звідки $x=3$ та $x=4$ одночасно, що неможливо.

60 (III). Для доведення використаємо лему.

Лема: сума відстаней від O до всіх сторін n-кутника не залежить від розташування точки O. З'єднаємо O з всіма вершинами.

Тоді $S_{A_1 \; A_n}=S_{OA_1A_2}+S_{OA_2A_3}+\ \dots$

Зауважимо, що $A_1A_2=A_2A_3$, а отже, шукана відстань $=\frac{2S_{A_1 \dots A_n}}{|A_1A_2|}$, що не залежить від точки O. Для доведення твердження задачі досить довести, що сума відстаней від точки O до "червоних" сторін нашого $2n$-кутника дорівнює сумі відстаней від O до "синіх" сторін. Продовжимо окремо "червоні" та "сині" сторони. При їх перетині ми отримаємо два правильні n-кутники, які можна сумістити поворотом на $\frac{360}{2n}$ навколо центра нашого $2n$-кутника. Отже, ці n-кутники рівні. З нашої леми тепер випливає, що сума відстаней від O до сторін "червоного" n-кутника дорівнює сумі відстаней від O до сторін "синього" n-кутника.

61 (III). Розглянемо на площині декартові координати (x_1, x_2). Нехай координати точки $a_i=(a_i^1, a_i^2)$. Симетрію відносно точки a_i можна тоді подати у вигляді $(x_1,x_2)\to-\left((x_1,x_2)-(a_i^1,a_i^2)\right)+(a_i^1,a_i^2)$. Звідки перетворення буде мати вигляд $(x_1,x_2)\to-(x_1,x_2)+(b_1,b_2)$, де (b_1,b_2) – деяка точка, що залежить від a. Точка, яка не змінюється при перетворенні S задовольняє рівність $(x_1,x_2)=-(x_1,x_2)+(b_1,b_2)$ (1).

Отже, $(x_1,x_2)\to\frac{1}{2}(b_1,b_2)$, тому що рівняння (1) має розв'язок, причому єдиний.

62 (III). Нехай a_{ij} – число, яке стоїть у i-тому рядку та j-тому стовпчику таблиці (нової). І нехай $a_{ij}>a_{ik}$, $j<k$. Тоді $l\ge i$, $m\le i$, $a_{mi}>a_{lk}$, тому що елементи стовпчика монотонно спадають. Але тоді у k-тому стовпчику існує не більше ніж $i-1$ число, кожне з яких більше хоча б за одне з чисел $a_{ij}, \dots, a_{ij}$. Отримане суперечить тому, що з самого початку числа кожного рядка монотонно зростали.

63 (IV). Із рівності $2m=n^2+1$ випливає, що n – непарне. Записавши його у вигляді $n=2k+1$, отримуємо $2m=4k^2+4k+2$, звідки $m=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2$.

64 (IV). Нехай a, b, c – довжини сторін BC, CA, AB, $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ Оскільки бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону у відношенні довжин двох прилеглих сторін, то $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}+\vec{a}\frac{c}{c+b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}+\vec{b}\frac{a}{a+c}$, $\overrightarrow{CC_1}=\vec{b}+\vec{c}\frac{b}{a+b}$. Враховуючи, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, отримуємо

$$\vec{O}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}\left(\frac{c}{c+b}-\frac{b}{a+b}\right)+\vec{b}\left(\frac{a}{a+c}-\frac{b}{a+b}\right).$$

Оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то $\frac{c}{c+b}-\frac{b}{a+b}=0$ і $\frac{a}{a+c}-\frac{b}{a+b}=0$.

Звідки одержимо, що $ac-b^2=0$ і $a^2-bc=0$. Отже, $a=b=c$.

65 (IV). Оскільки $y^2+y+1>0$, то із третього рівняння випливає, що $xz<0$. Отже, x і z мають протилежні знаки, але тоді з першого рівняння випливає, що $0>4yz+2z=2z(2y+1)$, а з другого – що $0>x+2xy=x(2y+1)$. Тому x і z повинні бути одного знаку. Отримали суперечність.

66 (IV). Нехай a_k – "відмічений" член із найменшим номером k, а m – найменше число, для якого $a_k+a_{k+1}+\dots+a_m>0$. Тоді для будь-якого p $(k\le p\le m)$ із $a_k+a_{k+1}+\dots+a_p<0$ випливає $a_{p+1}+\dots+a_m>0$, тобто a_p – "відмічений" член. Отже, всі члени $a_k, a_{k-1}, \dots, a_m$ – "відмічені" і їх сума – додатна. Повторюючи ці міркування для послідовності a_{m+1}, a_{m+2}, a_n і т. д., ми розіб'ємо всі "відмічені" члени на групи, у кожній з яких сума буде додатною.

67 (IV). Зауважимо, що для всіх натуральних чисел n:

$$\sin^n 0 + \cos^n 0 = \sin^n \frac{\pi}{2} + \cos^n \frac{\pi}{2} = 1.$$

Крім того, для всіх $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконуються нерівності:

$$\sin x + \cos x > \sin^2 x + \cos^2 x > \sin^3 x + \cos^3 x > \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}.$$

З іншого боку, для всіх $n \ge 4$ виконується нерівність:

$$\sin^n \frac{\pi}{4} + \cos^n \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}.$$

Тому шуканим числом буде $n = 3$.

68 (IV). Многокутник F_1 відрізняється від даного многокутника F тим, що містить додатково кілька трикутників $A_1C_0C_1, A_1C_1C_2, A_1C_{k-1}C_k$. Очевидно, що точка D перетину прямих C_iC_{i+1} і AA_1 лежить між точками B і A_1. Опустимо із точок A і A_1 перпендикулярно AH і A_1H_1 на пряму C_iC_{i+1}. Тоді $AH : A_1H_1 = AD : DA_1 \ge 1$, звідки $S_{\Delta AC_iC_{i+1}} \ge S_{\Delta A_1C_iC_{i+1}}$. Оскільки ця нерівність виконується для кожного $0 \le i \le k-1$, то

$$S_{F_1} = S_F + S_{\Delta A_1C_0C_1} + \ldots + S_{\Delta A_1C_{k-1}C_k} \le S_F + S_{\Delta A_1C_0C_1} + \ldots + S_{\Delta A_1C_{k-1}C_k} \le$$
$$\le S_F + S_F = 2S_F.$$

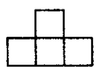
69 (IV). Досить довести, що кожний доданок лівої частини не перевищує $2\frac{a+c}{b+d}$. Для прикладу:

$$\frac{a+c}{b+d} \le 2\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow (a+b)(b+d) \le 2(a+c)(b+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ad + bd + b^2 \le ab + 2ac + 2bc + 2c^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \le a(2c-d) + b(2c-d) + \left(2c^2 - b(b-a)\right).$$

Оскільки числа a, b, c, d лежать у проміжку [1, 2], то $2c \ge d$, $2c^2 \ge 2$, $b(b-a) \le 2$. Тому остання нерівність вірна. Аналогічно встановлюється, що

$$\frac{c+d}{d+a} \le 2\frac{a+c}{b+d}.$$

70 (IV). Зауважимо, що коли центральна клітинка фігурки не збігається із жодною, відміченою на малюнку крапкою,

  – фігурка

то така фігурка не перекривається з фігуркою, показаною на малюнку. Крім того, якщо центральна клітинка фігурки лежить у внутрішньому квадраті розміром 98×98, то фігурка не виходить за межі дошки. Оскільки на малюнку відмічено 12 клітинок, то у нас залишається ще $98^2 - 12 \cdot 800 = 4$ вільних клітинок для центральної клітинки нової фігурки.

71 (IV). Використовуючи рівності

$$\cos(x+y) = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 \quad \text{і} \quad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

перетворимо ліву частину до вигляду

$$= 2\left(\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + 2 - 2\cos^2\frac{x-y}{2} =$$
$$= 2\left(\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + 2\left(1 - \cos^2\frac{x-y}{2}\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + 2\sin^2\frac{x-y}{2},$$

що невід'ємне.

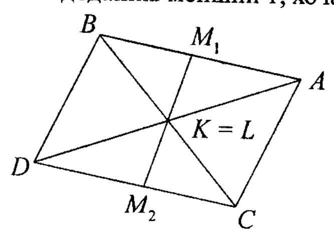
72 (IV). З даних точок вибираємо такі точки A, B, C, що всі, які залишилися, лежать по один бік від площини ABC. Візьмемо дві точки D і E з числа тих, що залишилися. Неважко помітити, що якщо E лежить всередині сфери, проведеної через A, B, C, D, то D лежить зовні сфери, проведеної через A, B, C, E.

73 (IV). Для кожного фіксованого C розглянено многочлен відносно x $R_c(x) = P(x, x+c)$. Оскільки $R_c(x) = R_c(x+1)$, то $R_c(x)$ є константою, і $P(x, x+c) = Q(c)$. Наприклад, $Q(c) = P(0, c)$.

74 (IV). $P_{n-1}^{(k-1)}$ рівне числу розбиттів числа n на k доданків, де серед доданків є одиниця (забираючи одиницю, одержимо розбиття $n-1$ на $k-1$ доданків). $P_{n-k}^{(k)}$ рівне числу розбиттів n на k доданків, кожний з яких не менший 2 (віднімаючи від кожного доданка одиницю, одержимо розбиття $n-k$ на k доданків).

75 (IV). $\dfrac{a+ab}{b+ab} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{a+1}\left(1 - \dfrac{a}{b}\right) < 1.$

Аналогічно переносимо в ліву частину $\frac{b}{c}$ і $\frac{c}{a}$. Кожний з трьох одержаних доданків менший 1, хоча б один з них від'ємний.



76 (IV). Проекція нашого тетраедра на площину, перпендикулярну до KL, є паралелограмом. Точки K і L проектуються в центр паралелограма. Проекції точок M_1 і M_2 лежать на протилежних прямих; відрізок, який їх з'єднує, проходить через центр паралелограма.

77 (IV). Доведемо, що для будь-якого зростаючого набору чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$ від'ємну похідну має функція

$$g(x) = \frac{x-a_1}{x-a_2} \cdot \frac{x-a_3}{x-a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{x-a_{2n-1}}{x-a_{2n}}.$$

Якщо $x < a_1$ або $x > a_{2n}$, або $a_{2k} < x < a_{2k+1}$, то $g(x)$ є добутком n складних додатних функцій з від'ємними похідними. Нехай $a_{2k-1} < x < a_{2k}$. Припустімо, що для функцій, які є добутком $(n-1)$ дробів нашого вигляду, твердження задачі має місце. Зокрема, має місце

$$\left(g(x)\,\frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k+1}}\right)' < 0,\quad g'(x)\,\frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k+1}} + g(x)\cdot\frac{a_{2k}-a_{2k+1}}{\left(x-a_{2k+1}\right)^2} < 0.$$

Враховуючи, що для $a_{2k+1} < x < a_{2k}$ буде

$$\frac{x-a_{2k}}{x-a_{2k+1}} > 0,\ g(x) < 0,\ \frac{a_{2k}-a_{2k+1}}{\left(x-a_{2k+1}\right)^2} < 0,\ \text{одержимо}\ g'(x) < 0.$$

78 (IV). Якщо обидва рівняння піднести до квадрату і додати, то одержимо:

$$3+2(\sin x\sin y+\sin x\sin z+\sin y\sin z+\cos x\cos y+\cos x\cos z+\cos y\cos z)=$$
$$\frac{27}{4}+\frac{9}{4}\Rightarrow\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)=3,$$

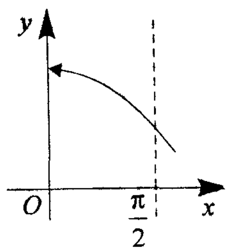
$$\text{звідки}\ \begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(y-z)=1,\\ \cos(z-x)=1.\end{cases}$$

Це означає, що x, y, z співпадають між собою з точністю до доданка, кратного 2π.

Якщо покласти, що $x = y = z$, то одержимо:

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z.$$

Отже, $x=y=z=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$

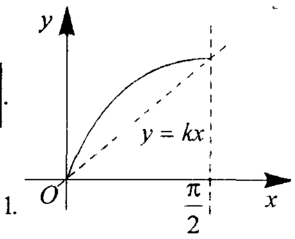


79 (IV). Функція $y=\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$ – невизначена. Її можна довизначати її границею в цій точці. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то можна прийняти $y(0) = 1$. Тоді

функція $y(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } x=1.\end{cases}$ буде неперервною в

усіх точках відрізка $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. З іншого боку, якщо розглянути графік функції $y=\sin x$ на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, то він "лежить вище" графіка хорди $y = kx$, бо крива $y=\sin x$ – опукла на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Для точки перетину синусоїди і хорди $y=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=k\dfrac{\pi}{2}=1\Rightarrow k=\dfrac{2}{\pi}.$



Це означає, що $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$

або $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$ для всіх точок x з інтервалу $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тому шукана площа:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=1\Rightarrow S>1.$$

82 (IV). $|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ \dots\ +a_n\sin b_nx|\le|\sin x|$, де $x\in(-1,\ 1)$, тобто $|x|<1$. Справедлива нерівність

$$\left|\frac{a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\ \dots\ +a_n\sin b_nx}{x}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|,\ |x|<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|a_1\frac{\sin b_1x}{x}+\frac{a_2\sin b_2x}{x}+\ \dots\ +\frac{a_n\sin b_nx}{x}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|,\ |x|<1.$$

Якщо в цій нерівності перейти до границі при $x\to 0$, то одержимо потрібну нерівність $|a_1b_1+a_2b_2+\ \dots\ +a_nb_n|\le 1$.

84 (IV). Нехай $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, для якого $P(19) = P(81) = 1981$. Тоді різниця $P(x) - 1981$ ділиться без остачі на $(x - 19)$ і $(x - 81)$, бо $x = 19$ і $x = 81$ є коренями цього многочлена. Нехай $Q(x)$ – частка, це є многочлен з цілими коефіцієнтами (видно з правила ділення). Отже, будемо мати

$$P(x)-1981=(x-19)(x-81)Q(x)\Rightarrow P(x)=1981+(x-19)(x-81)Q(x).$$

Тоді $P(1981)=1981+1962\cdot 1900\cdot Q(1981)=81+[1+1962\cdot Q(1981)]\cdot 1900.$

Отже, $P(1981)\neq 19$, бо дві останні цифри дорівнюють 81. Для того, щоб $P(1981) = 81$, необхідно і досить, щоб $1+1962\cdot Q(1981)=0$ (вираз у квадратних дужках), а це неможливо, бо $Q(1981)$ є цілим числом.

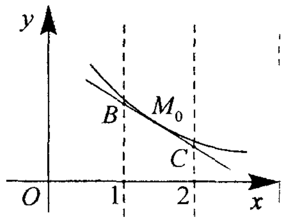
Висновок: многочлен $P(x)$ з перерахованими властивостями не існує.

85 (IV). Якщо уявити собі цю квадратну таблицю у вигляді шахової дошки, на чорних полях якої стоять "1", розподіл білих – "1", то будемо мати набір двох чисел з рівними сумами по рядках і стовпцях, але не використане число "0". Якщо $n > 1$, то "0" можна списати по одній діагоналі замість "+", або по іншій діагоналі замість "–", або по обох разом, суми будуть рівними між собою. Наприклад,

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1&1&-1\\-1&0&-1&1\\1&-1&0&-1\\-1&1&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\-1&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Тільки у випадку $n = 1$ [::] розмістити всі три числа -1, 0, 1, щоб суми у рядках і стовпцях були однаковими, – неможливо.

86 (IV). Нехай точка дотику має координати.



$M_0\left(t,\frac{1}{t}\right)$, $t\in[1,2]$. Запишемо рівняння дотичної: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $(x_0=t)$,

$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$; $f'(x_0)=f'(t)=-\frac{1}{t^2}$.

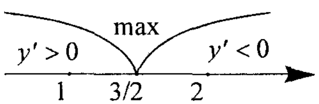
Тоді $y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$ – рівняння дотичної до кривої $y=\frac{1}{x}$. Знайдемо координати точок B і C:

$$x=1,\ y_1=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=\frac{t-1+t}{t^2}=\frac{2t-1}{t^2}\Rightarrow B\left(1,\ \frac{2t-1}{t^2}\right),$$

$$x=2,\ y_2=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=\frac{-2+t+t}{t^2}=\frac{2t-2}{t^2}\Rightarrow C\left(2,\ \frac{2(t-1)}{t^2}\right).$$

Площа трапеції $S(t)=\frac{y_1+y_2}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\frac{2t-1+2(t-1)}{t^2}=\frac{4t-3}{2t^2}$. Дослідимо функцію $S(t)$ на екстремум

$$S'(t)=\frac{1}{2}\frac{4t^2-2t(4t-3)}{t^4}=\frac{1}{2}\frac{-4t^2+6t}{t^4}=\frac{3-2t}{t^3}\quad(t\neq 0),\quad S'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}.$$



Площа трапеції буде найменшою при $t=3/2=a$. Отже, дотичну потрібно провести в точці з координатами $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$.

87 (IV). Розглянемо функцію $y=C^{x^2}=e^{x^2\ln C}$.

Якщо $C=1$, то $y=1$ і $a_n\equiv 1$ (для будь-якого $n\in N$).

Дана послідовність збігається до 1.

Якщо $0<C<1$, то $y=e^{-x^2\ln\left(\frac{1}{C}\right)}=e^{-x^2\left(\sqrt{\ln\frac{1}{C}}\right)^2}=e^{-(\alpha x)^2}$, де $\alpha=\sqrt{\ln\frac{1}{C}}>0$.

$$a_{n+1}=\int_0^{a_n}e^{-(\alpha x)^2}dx\Leftrightarrow \alpha a_{n+1}=\int_0^{a_n}e^{-(\alpha x)^2}d(\alpha x)=\int_0^{\alpha a_n}e^{-t^2}dt.$$

Якщо $b_n=\alpha a_n$, то $b_0=\alpha$, $b_{n+1}=\int_0^{b_n}e^{-x^2}dx$. Вияснимо, як себе поводять b_n.

$b_0=\alpha>0$.

$$b_1=\int_0^{\alpha}e^{-x^2}dx<\int_0^{\alpha}1dx=\alpha=b_0\Rightarrow b_1<b_0;\ b_{n+1}=\int_0^{b_n}e^{-x^2}dx<\int_0^{b_n}dx=b_n,\ n\in N.$$

Отже, для всіх $n\in N$, $b_n>0$ і $b_{n-1}<b_n$, а тому існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}b_n=b\ \text{ і }\ \lim_{n\to\infty}b_{n+1}=b.$$

Переходячи до границі при $x\to\infty$, одержимо, що $b_{n+1}=\int_0^{b_n}e^{-x^2}dx$. Якщо врахувати неперервність інтеграла від верхньої межі інтегрування, то одер-

жимо, що $b=\int_0^{b}e^{-x^2}dx$. Функція $\Phi(x)=\int_0^{x}e^{-t^2}dt$ строго зростає на $[0;\ +\infty)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi(x)$ непарна, на множині R. $\Phi(+\infty)=\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (з таблиць у довіднику з математики). $\Phi'(x)=e^{-x^2}$, $\Phi'(0)=1$. З таблиць видно, що $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{x}e^{-t^2}dt<x$ $(x>0)$. Тим більше (бо $\frac{\sqrt{\pi}}{2}>1$) $\int_0^{x}e^{-t^2}dt<x$ $(x>0)$. Звідки зрозуміло, що $\int_0^{x}e^{-t^2}dt=x$ лише при $x=0$. Це означає, що $b=\lim_{n\to\infty}b_n=0$.

Отже, послідовність $\{b_n\}$ (при $n\to\infty$) збігається до 0.

$\underline{C>1}$ $y=e^{x^2\ln C}=e^{(\beta x)^2}$, де

$$\beta=\sqrt{\ln C}>0,\ a_{n+1}=\int_0^{a_n}e^{(\beta x)^2}dx\Leftrightarrow \beta a_{n+1}=\int_0^{a_n}e^{(\beta x)^2}d(\beta x).\ \beta a_{n+1}=\int_0^{\beta a_n}e^{x^2}dx.$$

Введемо позначення: $b_n=\beta a_n$, $b_0=\beta$. $b_{n+1}=\int_0^{b_n}e^{-x^2}dx>\int_0^{b_n}dx=b_n$, $n\in N$.

$b_{n-1}>b_n$. $\{b_n\}$ – строго зростає при $n\to\infty$. Чи ця послідовність обмежена зверху?

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\int_0^{b_{n+1}}e^{x^2}dx-\int_0^{b_n}e^{x^2}dx=\int_{b_n}^{0}e^{-x^2}dx+\int_0^{b_{n+1}}e^{x^2}dx=$$

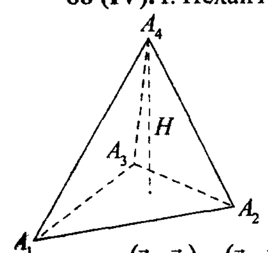
$$=\int_{b_n}^{b_{n+1}}e^{x^2}dx>e^{b_n^2}(b_{n+1}-b_n)\ge e^{\beta^2}(b_{n+1}-b_n).$$

Якщо застосовувати цей метод до різниці $b_{n-1}-b_n$, то

$$b_{n+1}-b_n\ge e^{\beta^2}(b_n-b_{n-1})\ge e^{2\beta^2}(b_{n-1}-b_{n-2})\ge\ \dots\ \ge e^{n\beta^2}(b_1-b_0).$$

Ми бачимо, що при $n\to\infty$ різниця $b_{n+1}-b_n\to\infty$. Тоді $\beta a_n\to\infty$, а отже, $a_n\to\infty$. Послідовність $\{a_n\}$ при $C>1$ розбігається.

88 (IV). I. Нехай H – точка перетину висот піраміди.



Позначимо: $\overrightarrow{HA_i}=\vec{r}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. $\vec{r}_i=\overrightarrow{HA_i}$ перпендикулярний до площини $(A_jA_kA_l)$. Тут індекси всі рівні і приймають значення 1, 2, 3, 4. Якщо $\vec{r}_i=\overrightarrow{HA_1}$ перпендикулярний до площини, то він перпендикулярний до всіх векторів, які лежать у цій площині, тому

$$(\vec{r}_1,\ \vec{r}_2)=(\vec{r}_1,\ \vec{r}_3)=(\vec{r}_1,\ \vec{r}_4)=(\vec{r}_2,\ \vec{r}_3)=(\vec{r}_2,\ \vec{r}_4)=(\vec{r}_3,\ \vec{r}_4)=0=\text{const}.$$

Запишемо суму квадратів ребер піраміди:

$$A_iA_j^2+A_kA_l^2=(\vec{r}_j-\vec{r}_i)^2+(\vec{r}_l-\vec{r}_k)^2=\vec{r}_1^{\,2}+\vec{r}_2^{\,2}+\vec{r}_3^{\,2}+\vec{r}_4^{\,2}-4a=\text{const}$$

для даної піраміди. Отже, $A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 \Rightarrow$ суми квадратів протилежних ребер піраміди рівні.

90 (IV). $f(x^3 - y^3) = (f(x + y))^3$.

Для $x = y = 0$ маємо $f(0) = (f(0))^3$, тобто $f(0) = 0$ або $f(0) = \pm 1$. Для $x = -y$ маємо $f(2x^3) = = (f(0))^3 = f(0)$, тобто $f(0) = 0, \ \pm 1$.

Функції $f(0) = 0, \ \pm 1$, задовільняють рівняння.

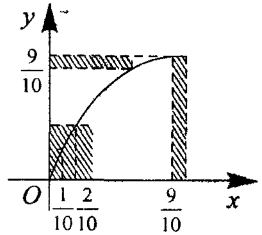
Отже, відповідь $f(x) \equiv 0, f(x) \equiv 1, f(x) \equiv -1$.

91 (IV). Розглянемо графік функції $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ на [0, 1].

Тоді вираз

$$\sin\frac{\pi}{20} + \ \dots \ + \sin\frac{9\pi}{20} + \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{1}{10} + \ \dots \ + \arcsin\frac{9}{10}\right)$$

є площею заштрихованих прямокутників і менше ніж $1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2$. Тут $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ – площа чорного квадратика.



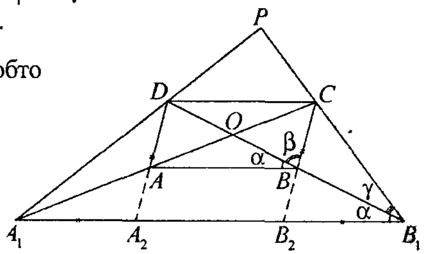
92 (IV). Нехай A_2 і B_2 – точки перетину прямих AD і BC з прямою A_1B_1 відповідно.

Нехай $\angle ABO = \alpha, \angle OBC = \beta$ і $\angle CB_1B = \gamma$.

Оскільки $AB \| A_1B_1$, то $\angle OB_1A_1 = \alpha$.

За умовою $\angle A_1B_1C = \frac{1}{2}\angle ABC$ тобто $(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Звідки $\beta = \alpha + 2\gamma$.

Оскільки $\beta = \angle OBC$ – зовнішній кут ΔCBB_1 та $\angle BCB_1 = \beta - \gamma = \alpha + \gamma = = \angle CB_1B_2$, тобто $|CB_2| = |B_1B_2|$.



Оскільки $A_1B_1 \| BA \| CD$, то $\Delta B_2BB_1 \sim \Delta CBD$, то $\Delta CAD \sim \Delta A_1AA_2$.

Тому $\frac{B_2B_1}{CD} = \frac{B_2B}{BC} = \frac{A_2A}{AD} = \frac{A_2A_1}{CD}$.

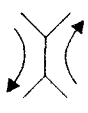
Звідси $B_2B_1 = A_1A_2$. Враховуючи, що $A_2D = B_2C$, маємо $A_1A_2 = A_2D$. Звідси

$$\angle DA_1A_2 = \frac{1}{2}\angle DA_2B_1 = \frac{1}{2}\angle CB_2B_1 = \frac{1}{2}\left(180^0 - \angle B_2CB_1 - \angle B_2B_1C\right) =$$
$$= 90^0 - (\alpha + \gamma) = 90^0 - \angle CB_1B_2.$$

Отже, $\angle P = 90^0$.

93 (IV). Припишемо всім відрізкам, що сполучають центр октаедра з центрами граней, +1. Зафіксуємо на кожній грані напрями за годинниковою стрілкою. Зафіксуємо також напрямок кожного з ребер октаедра. Якщо обіг грані збігається з напрямом граничного ребра, то відповідному відрізку приписуємо +1, інакше приписуємо –1. Відрізку, що сполучає середину ребра з його початком, також приписуємо +1, з кінцем –1.

Оскільки довільні дві грані, що з'єднані ребром, мають відносно нього протилежні напрямки обігу, то у відповідного чотирикутника (одна з вершин – центр октаедра) добуток буде –1 (єдина сторона з –1):



Для чотирикутників, у яких одна з вершин є вершиною октаедра, можливі ситуації. У всіх випадках легко бачити, що добуток відповідних чисел = –1.

94 (IV). З умови випливає, що cos ≡ 0, то $\sin x \ge \sqrt{\sin x + \cos x} \ge \sqrt{\sin x}$, тобто $\sin x = 0$ або $\sin x = 1$.

Підставляючи в рівняння, легко переконатися, що всі x, для яких $\sin x = 0$, не задовільняють рівняння, а всі x, для яких $\sin x = 1$ – задовільняють. Отже, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$.

95 (IV). Досить довести, що OA є спільною дотичною до кіл ω_1 та ω_2. Припустімо, що це не так. Тоді OA перетинає ще раз ω_1 у точці X та ω_2 у точці Y, то $X = Y$.

Але за властивістю дотичної $OX \cdot OA = OC^2 = OB^2 = OY \cdot OA$.

96 (IV). Очевидно, що треба розглянути два випадки:

$$a < \frac{a+b}{1996} < b \text{ та } \frac{a+b}{1996} < a < b.$$

Розглянемо перший (другий – аналогічний).

Нехай $\frac{a+b}{1996} = aq^n$, $b = aq^m$, $m > n$, маємо $\left(\frac{a+b}{1996}\right)^m = b^n a^{m-n}$, або $(a + b)^m = = 1996^m b^n a^{m-n}$. Очевидно, що ми можемо скоротити на всі прості дільники a та b, не рівні 2 та 499. Тобто вважаємо $a = 2^i 499^j$, $b = 2^k 499^l$. Якщо $i \ne k$ або $j \ne l$, то ми можемо скоротити ліву і праву частини на $2^{\min(i,k)} 499^{\min(j,l)}$, після чого ліва частина не буде ділитися на 2 та на 499, що призводить до суперечності. Оскільки $a = b$ неможливо, отримуємо, що $a, b, \frac{a+b}{1996}$ не є членами геометричної прогресії.

97 (IV). а) На відстані 1 можуть знаходитись лише сусідні по вертикалі або горизонталі точки. Отже, з взаємної однозначності відображення випливає, що елементарний кадрат □ 1 зі стороною 1 може відобразитись лише в такий самий квадрат. Отже, наше відображення є композицією паралельного переносу, повороту та симетрії, тобто зберігає довільну відстань.

б) Це не правильно. Відображення 1 задане.

$f(2m, 2n) = (2m + 1, 2n)$; $\quad f(2m + 1, 2n) = (2m, 2n)$;

$f(2m, 2n + 1) = (2m, 2n + 1)$; $\quad f(2m + 1, 2n + 1) = (2m + 1, 2n + 1)$,

m, n – цілі зберігає відстань 2, але не зберігає відстань 1.

в) Це правильно. Згідно пункту а), досить довести, що відображення, яке зберігає відстань 2 та 3, зберігає відстань 1.

За допомогою паралельного зсуву вважатимемо $f(0, 0) = (0, 0)$; нам досить довести, що $f((1,0) \subset \{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),\})$. Зробивши додатково поворот і симетрію, вважатимемо $f(2m, 2n) = (2m, 2n)$ для всіх цілих m та n. Нехай $A = \{(3,0),(-3,0)\}$, $B = \{(0,3),(0,-3)\}$. Очевидно, або $f(A) = A$, або $f(A) = B$. Якщо $f(A) = A$, тоді маємо, що відстань між образами точок (3, 0) та (6, 0) змінилася, що не можливо, бо вона рівна 3. Отже, f зберігає відстань 1.

11 клас

1 (II). $x_{1,2} = -n \pm (n+8)$,

$x_1 - x_2 = \pm(2n+16)$.

Треба знайти найбільше значення функції

$S(n) = -16n - 64 - (2n+16)^2 = -4n^2 - 80n - 320$,

$S'(n) = -8n - 80 = 0;\ n = -10$.

2 (II). Розіб'ємо квадрат на 25 рівних квадратів із стороною $\frac{1}{5}$. Тоді знайдеться один з квадратів, у який попаде не менше трьох точок, бо $51 > 2\cdot 25$. Круг, описаний навколо цього квадрата, містить не менше трьох точок і має радіус $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$.

3 (II). Якщо висота H, то діагоналі основи $H\sqrt{3}$ і $\frac{H}{\sqrt{3}}$;

$$3H^2 + \frac{H^2}{3} = 2(19^2 + 22^2);\ \frac{10H^2}{3} = 1690;\ H^2 = 507;\ H = 13\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

4 (II). $f'(x) = A\cdot 3^x\cdot\ln 3$ і $A\cdot 3^x\cdot\ln 3 = 2$; $A = \frac{2}{\ln 3}$.

$$\int_1^2 (A\cdot 3^x + B)dx = \left(A\cdot 3^x\frac{1}{\ln 3} + Bx\right)\Big|_1^2 = A\cdot\frac{9}{\ln 3} + 2B - A\cdot\frac{3}{\ln 3} - B = A\cdot\frac{6}{\ln 3} + B;$$

$$B = 12 - \frac{12}{\ln^2 3}.$$

5 (II). Нехай $4x + 3y$ ділиться на 5, тоді $2(4x + 3y) = 8x + 6y$ також ділиться на 5. $2x - y = 10x + 5y - (8x + 6y) = 5(2x + y) - 2(4x + 3y)$ ділиться на 5, то і їхня різниця ділиться на 5. (З ознак подільності).

6 (II). Методом від супротивного. Припустімо, що такий трикутник існує.

7 (II). Помічаємо, що $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$, тоді $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Дане рівняння рівносильне рівнянню: $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = 4$, яке розв'язується заміною $y = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

Відповідь: $x = 2$, $x = -2$.

8 (II). $\sqrt{3} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$, $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = \frac{4}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \frac{4}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

Тоді вихідну нерівність можна представити у вигляді

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2x+6} > \left(\frac{4}{4+2\sqrt{3}}\right)^{-(x+7)} \text{ або}$$

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2x+6} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{-2(x+7)} \Rightarrow 2x+6 < -2-(x+7) \Rightarrow x+3 < -x-7 \Rightarrow x < -5.$$

Відповідь: Найбільше ціле число $x = -6$.

9 (II). Нехай $\sqrt{x-4} = z \Rightarrow x = z^2 + 4$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$\sqrt{z^2+1-2z} + \sqrt{z^2+4-4z} = 1 \Leftrightarrow |z-1| + |z-2| = 1.$$

1) $\begin{cases} z \ge 2; \\ z-1+z-2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge 2; \\ z=2, \end{cases} \Leftrightarrow z = 2.$

2) $\begin{cases} 1 \le z < 2; \\ z-1-z+2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le z < 2; \\ z=1, \end{cases} \Leftrightarrow z \in [1,\ 2).$

3) $\begin{cases} z < 1; \\ -z+1-z+2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z < 1; \\ z=1, \end{cases} \Leftrightarrow z \in \varnothing.$

Отже, $z \in [1,\ 2] \Rightarrow 1 \le \sqrt{x-4} \le 2 \Rightarrow 5 \le x \le 8$, $x \in [5;\ 8]$ $S = 5+6+7+8 = 26$

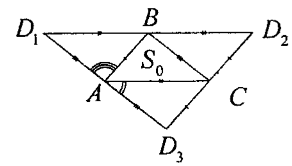
10 (III). $2^{x-1}\cdot 3^{y-1} = 1 = 3^{x-1}\cdot 16^{y-1}$. Після піднесення лівої частини до степеня $x - 1$, а правої до степеня $y - 1$, отримаємо $2^{(x-1)^2} = 16^{(y-1)^2}$; $(x-1)^2 = 4(y-1)^2$. Якщо $x - 1 = 2(y - 1)$, то $2^{2(y-1)}3^{y-1} = 1$; $12^{y-1} = 1$; $y - 1 = 0$; $y = 1$, $x = 1$.

Якщо $x - 1 = -2(y - 1)$, то $2^{-2(y-1)}3^{y-1} = 1$;

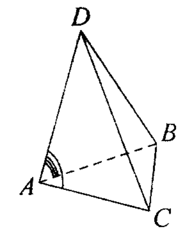
$\left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} = 1$; $y - 1 = 0$; $y = 1$; $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$, $y = 1$.

11 (III). Розріжемо піраміду по бічних ребрах і розкладемо бічні грані на площину основи.



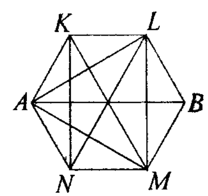
$S_{\text{п пр}} = 4S_0$.



12 (III). За нерівністю Коші:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} + \ldots + \frac{2n}{2n-1}\right) > \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}} = \sqrt[n]{2}.$$

13 (III). Спочатку знаходимо дві однокольорові точки на відстані 2 (досить розглянути правильний трикутник зі стороною 2). Нехай вони білі, позначимо їх A та B. Будуємо правильний шестикутник $AKLBMN$. Якщо з точок K, L, M, N хоча б одна біла, то вона разом з A і B складає вершини шуканого трикутника. Якщо ж K, L, M, N – чорні, то трикутник KLM – шуканий.



14 (III). Доведення методом повної математичної індукції.

15 (III). I спосіб: (методом математичної індукції).

I. $n = 1$. $2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 1 = 0 \vdots 6$.

II. Припустімо, що твердження вірне для $n = k$: $(2k^3 - 3k^2 + k) \vdots 6$.

III. Переконаємося, що твердження вірне для $n = k + 1$.

$$2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1 = 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 =$$
$$= \underbrace{(2k^3 - 3k^2 + k)}_{6} + \underbrace{6k^2}_{6}.$$

Отже, число в лівій частині ділиться на 6. За принципом повної індукції, можемо зробити висновок, що $(2n^3 - 3n^2 + n) \vdots 6$ при $\forall n \in N$.

II спосіб: $2n^3 - 3n^2 + n = n(2n^2 - 3n + 1) = n(n-1)(2n-1)$.

$НСД(2, 3) = 1$. Переконаємося, що число ділиться на 2.

Розглянемо випадки:

1. $n = 2k;\ n(n-1)(2n-1) = 2k(2k-1)(4k-1) \vdots 2;$
2. $n = 2k+1;\ n(n-1)(2n-1) = (2k+1)2k(4k+1) \vdots 2.$

Аналогічним способом переконаємося, що $n(n-1)(2n-1) \vdots 3$.

Розглянемо випадки:

1. $n = 3k;\ 3k(3k-1)(6k-1) \vdots 3;$
2. $n = 3k+1;\ (3k+1)3k(6k+1) \vdots 3;$
3. $n = 3k+2;\ (3k+2)(3k+1)(6k+3) \vdots 3.$

Отже, $2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6 при $\forall n \in N$.

16 (III). Застосуємо метод індукції:

I. $n = 1.\ 4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$.

II. Припускаємо, що при $n = k$, $(4^k + 15k - 1) \vdots 9$.

III. Доведемо, що при $n = k + 1$,

$$\left[4^{k+1} + 15(k+1) - 1\right] \vdots 9;$$
$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4^{k+1} + 15k + 14 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 =$$
$$= [4\underbrace{(4^k + 15k - 1)}_{9} - \underbrace{45k}_{9} + \underbrace{18}_{9}] \vdots 9.$$

Отже, $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9 при будь-якому натуральному n.

17 (III). Введемо позначення: $S_m = 1^n + 2^n + \ldots + m^n$.

$2S_m = (1^n + m^n) + (2^n + (m-1)^n) + (3^n + (m-2)^n + \ldots + (k^n + (m-k+1)^n) + \ldots + (m^n + 1^n)$.

Оскільки n – непарне, то кожний доданок ділиться на $(m + 1)$, тому $2S_m \vdots (m+1)$. Тоді в силу довільності m, $2S_{m-1} \vdots m$.

$$2S_m = \underbrace{2S_{m-1}}_{m} + \underbrace{2m^n}_{m} \Rightarrow 2S_m \vdots m.$$

Але $НСД(m; m+1) = 1$, то $2S_m \vdots m(m+1) \Rightarrow 2S_m = m(m+1)q$, де q – натуральне. З іншого боку, $1 + 2 + \ \ldots\ + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$, тому

$$S_m = \frac{m(m+1)}{2}q = (1 + 2 + \ \ldots\ + m)q,$$

що і потрібно було довести.

18 (III). Якщо $n = 2$, то твердження очевидне. Припустімо, що $n > 2$. Тоді: $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$, $a_{n-1} = (n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}$. Додавши ці дві рівності, одержимо $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$, звідки видно, що a_n ділиться на $(n-1)$.

19 (III). Кожна з функцій, які входять у рівняння $\log_{1/2}|x|$, $|x-2| + |x+2|$, парна.

Тому достатньо знайти лише додатні корені цього рівняння. Корені будемо шукати на інтервалах: $(0, 2]$, $(2, \infty)$.

1) $x \in (0,\ 2] \Rightarrow |x| = x;\ |x-2| = -x + 2;\ |x+2| = x + 2.$

Тому можна записати, що $\log_{1/2} x = \dfrac{1}{4}(-x + 2 + x + 2) \Leftrightarrow \log_{1/2} x = 1$.

Звідки $x = \dfrac{1}{2}$.

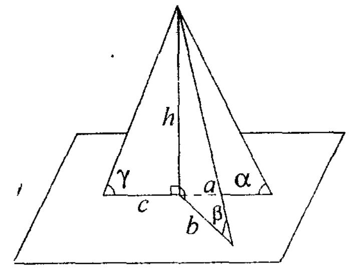
2) $x \in (2,\ \infty) \Rightarrow |x| = x;\ |x-2| + |x+2| = x - 2 + x + 2 = 2x.$

Рівняння набуде вигляду: $\log_{1/2} x = \dfrac{1}{2}x$.

Це рівняння розв'язків не має, бо права частина набуває додатних значень, а ліва – від'ємних, якщо $x \in (2, \infty)$.

Отже, розв'язками рівняння є $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

20 (III). Нехай h – висота вишки, а α, β, γ – відповідні кути, під якими видно вишку.



За умовою, $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$, $h = a\,\text{tg}\alpha$, $h = b\,\text{tg}\beta$, $h = c\,\text{tg}\gamma$.

Звідси можна записати, що

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = \frac{h}{a} + \frac{h}{b} = h\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{h(a+b)}{ab},$$

$$\text{а}\ \ \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta = \frac{h^2}{ab}.$$

З останньої рівності одержимо:

$$\frac{h}{c} = \text{tg}\gamma = \text{tg}\left[90^0 - (a+b)\right] = \text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta} = \frac{1 - \frac{h^2}{ab}}{\frac{h(a+b)}{ab}} = \frac{ab - h^2}{h(a+b)}.$$

Отже, відносно h одержали рівняння:

$$\frac{h}{c} = \frac{ab - h^2}{h(a+b)} \Leftrightarrow h^2(a+b) = abc - ch^2 \Leftrightarrow h^2(a+b+c) = abc \Rightarrow h = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$

21 (III). Дана нерівність рівносильна таким нерівностям:

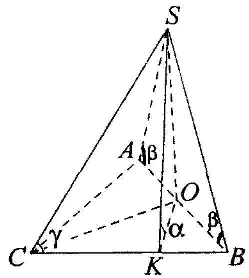
$$\cos^4\alpha\cos^2\beta + \sin^4\alpha\sin^2\beta \ge \sin^2\beta\cos^2\beta,$$
$$\cos^4\alpha\cos^2\beta + \left(1 - \cos^2\alpha\right)^2\left(1 - \cos^2\beta\right) \ge \left(1 - \cos^2\beta\right)\cos^2\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos^4\alpha\cos^2\beta + \left(1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right)\left(1 - \cos^2\beta\right) \ge \left(\cos^2\beta - \cos^4\beta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^4\alpha\cos^2\beta+1-\cos^2\beta-2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha\cos^2\beta+$$
$$+\cos^4\alpha-\cos^4\alpha\cos^2\beta\ge\cos^2\beta-\cos^4\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1\right)^2\ge 0.$$

Остання нерівність очевидна.

Рівність виконується для тих α і β, для яких $\cos^2\alpha=\sin^2\beta\left(\beta\ne\frac{\pi}{2}k\right)$, тобто при $\alpha=\pm\beta+\frac{2n+1}{2}\pi$, $\beta\ne\frac{\pi}{2}k$, де $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

22 (III). За умовою, $AB=BC=AC$, бічна грань $SAB\perp$ до площини основи, а значить, перпендикулярна до площини ΔABC. Отже, висота SO ΔSAB є висотою піраміди. $SK\perp CB\Rightarrow BC\perp OK$. Кут SKO – лінійний кут двогранного кута з ребром BC, тобто кут нахилу грані SBC до площини основи. За умовою, $\angle SKO=\alpha$. І грань SAC до площини основи нахилена під кутом α. Потрібно знайти кути нахилу ребер SC, SB, SA до площини основи, тобто до площини ΔABC.



Кут SCO – кут між ребром SC і площиною ΔABC, $\angle SAO$ – кут між ребром SA площиною ΔABC; $\angle SBO$ – кут між ребром SB і площиною ΔABC. $SA=SB(\Delta SAB$ – рівнобедрений$)$. ΔSOC, ΔSOK, ΔSOD – прямокутні з спільним катетом SO.

З ΔSOC: $SO=OC\,\mathrm{tg}\gamma$; з ΔSOK: $SO=OK\,\mathrm{tg}\alpha$; з ΔSOB: $SO=OB\,\mathrm{tg}\beta$, тому $OC\,\mathrm{tg}\gamma=OK\,\mathrm{tg}\alpha=OB\,\mathrm{tg}\beta$. (1)

Виразимо OK і OB через OC:

з $OC\,\mathrm{tg}\gamma=OK\,\mathrm{tg}\alpha=OB\,\mathrm{tg}\beta$;

з ΔSOB: $OB=OC\,\mathrm{tg}30^0=OC\frac{1}{\sqrt3}$.

Тепер рівності (1) наберуть вигляду:

$$OC\,\mathrm{tg}\gamma=\frac12 OC\,\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt3}OC\,\mathrm{tg}\beta\Rightarrow\mathrm{tg}\gamma=\frac12\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt3}\mathrm{tg}\beta.$$

Отже, $\mathrm{tg}\gamma=\frac12\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta=\frac{\sqrt3}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

23 (III). Якщо сторона квадрата 1, то площа “квітки” дорівнює $4\cdot\frac12\cdot\frac{\pi}{4}-1=$ $=\frac{\pi}{2}-1$. Радіус описаного круга $\frac{1}{\sqrt2}$, тому площа частини круга поза квадратом дорівнює $\pi\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2-1=\frac{\pi}{2}-1$.

24 (III). Серед чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{1994}$ рівно 990 чисел, не менших 997. З них хоча б одне число має один з номерів 998, 999, ..., 1994.

25 (III). Підставивши $x=y=0$, одержимо $f(0)=0$. Підставивши $y=0$, одержимо $f(x^2)=f(x)\Rightarrow f(x^4)=f(x)$.

Для $y=-x^2$, маємо $0=f(x)+f(x^4)\Rightarrow f(x)=0$.
Відповідь: $f(x)=0$.

26 (III). $S_{\Delta A_1B_1C_1}\le\frac12 A_1B_1\cdot A_1C_1<\frac{\sqrt3}{8}$, $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt3}{4}$. **Для кута між площинами** $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}<\frac12$. Звідси $\alpha>60^0$.

27 (III). Щоб перевірити, що $x^2(\sin x+1)+x\cos x+\frac12>0$, при $\sin x+1>0$, вважаємо ліву частину квадратним тричленом, для якого знаходимо дискримінант $D=(\cos x)^2-4(\sin x+1)\frac12=\left(1-\sin^2x\right)-2(1+\sin x)=-(1+\sin x)^2<0\Rightarrow$ нерівність виконується при всіх дійсних x. Випадок $\sin x+1=0$ легко перевіряємо окремо.

28 (III). Введемо позначення $x=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$, $x>0$. Обчислимо вираз

$$2x^2-x=2\left(\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-\right.$$
$$\left.-2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}=1+\cos\frac{2\pi}{7}+1+\cos\frac{4\pi}{7}+1+$$
$$+\cos\frac{6\pi}{7}-2\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)-\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}=3-6\cos\frac{\pi}{7}+$$
$$+6\cos\frac{2\pi}{7}-6\cos\frac{3\pi}{7}\Rightarrow 2x^2-x=3-6x\Rightarrow 2x^2+5x-3=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-5\pm7}{4};$$

$x_1=\frac12$; $x_2=-3$ (не задовільняє умову задачі).

Отже, $x=\frac12$.

29 (III). $$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)=\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}}=$$
$$=\left(\sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)\left(\sqrt{a_2}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)\ldots\left(\sqrt{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\ge2^n$$

(кожна дужка є сумою взаємно обернених чисел, тому вона ≥2.

30 (III). Доведення методом математичної індукції. Якщо $n=1$, то $2^3+1=9\ \vdots\ 3^2$ і не ділиться на 3^3. Припустимо, що $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n-1} і не ділиться на 3^{n+2}. Треба довести, що $2^{3^{n+1}}+1$ ділиться на 3^{n+2} і не ділиться 3^{n-3}.

$$2^{3^{n+1}}+1=\left(2^{3^n}\right)^3+1=\left(2^{3^n}+1\right)\left[\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right].$$

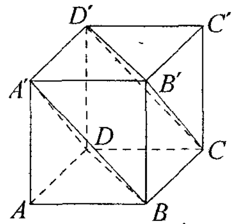
Перший множник, за припущенням, ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n-1}. Залишилось довести, що другий множник ділиться на 3 і не ділиться на 3^2.

$$4^{3^n}-2^{3^n}+1=(3+1)^{3^n}-(3-1)^{3^n}+1.$$

Якщо використати біном Ньютона, то перші два доданки будуть мати по (3^n+1) членів розкладу, кожний з яких, крім останніх, має співмножником число 3, отже, ділиться на 3. Останні члени в цих доданках рівні 1. Ці одиниці в сумі з доданою 1 дають 3. Отже, розглянутий вираз ділиться на 3, бо всі його члени діляться на 3. Запишемо вираз, який досліджується, по іншому:

$$4^{3^n}-2^{3^n}+1=64^{3^{n-1}}-8^{3^{n-1}}+1=(63+1)^{3^{n-1}}-(9-1)^{3^{n-1}}+1.$$

Проводячи аналогічні міркування, ми переконаємося, що всі члени двох перших доданків, крім останніх, діляться на 9. Останні члени разом із заданою 1 дають у сумі 3 (не ділиться на 9). Отже, цей вираз не ділиться на 3^2. Що і треба було довести.



31 (III). Треба довести, що діагональ $AC'\perp(BDA')$ і відстань від точки A до площини (BDA') дорівнює $\frac{1}{3}AC'$. Діагональ AC' куба $ABCDA'B'C'D'$ – це фактично діагональ прямокутника $ABC'D'$, а також діагональ прямокутника $ADC'B'$. Оскільки всі ці прямокутники рівні (конусуентні), то діагональ однаково нахилена до кожної з трьох граней при вершині A. Звідси випливає, що діагональ AC' містить висоту піраміди $ABDA'$ з вершиною A.

Проведемо ще площину $(CB'D')$, яка паралельна (BDA'). Якщо через точку A, а також через C' провести площини, паралельні двом попереднім, то легко довести, що відстані між кожними сусідніми з цих чотирьох площин рівні між собою. Щоб це довести, досить показати, що які-небудь відрізки (не обов'язково перпендикулярні до площин) між паралельними площинами є також рівними між собою. Такими відрізками можуть бути $|AD|$, $|BC|$, $|B'C'|$. Оскільки всі площини рівновіддалені, то вони ділять діагональ AC' на 3 (три) рівновеликі частини.

32 (III). $4\xrightarrow{в)}2\xrightarrow{в)}1\xrightarrow{а),\,а)}144\xrightarrow{в)}72\xrightarrow{в)}36\xrightarrow{в)}18\xrightarrow{а)}$

$\xrightarrow{а)}184\xrightarrow{в)}92\xrightarrow{в)}46\xrightarrow{а)}464\xrightarrow{в)}232\xrightarrow{в)}116\xrightarrow{в)}$

$\xrightarrow{в)}58\xrightarrow{в)}29\xrightarrow{а),\,а)}2944\xrightarrow{в)}1472\xrightarrow{в)}736\xrightarrow{в)}318\xrightarrow{в)}$

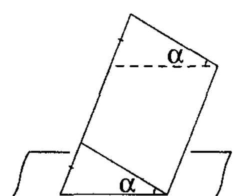
$\xrightarrow{в)}159\xrightarrow{а),\,а)}15944\xrightarrow{в)}7972\xrightarrow{в)}3986\xrightarrow{в)}1993.$

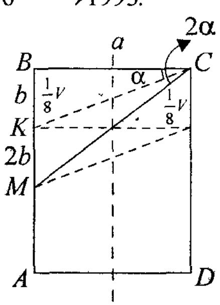
33 (III).

$$\frac{1}{8}+\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3}{8}<0{,}5;$$

$$V_ц=\pi R^2H;$$

$$\frac{b}{a}=\text{tg}\alpha.$$





Об'єм частини циліндра MBC дорівнює $\frac{3}{8}V$. Тому $KM=2b$.

$$\text{tg}2\alpha=\frac{3b}{a}=3\text{tg}\alpha.\ \ \text{tg}2\alpha-3\text{tg}\alpha=0\Rightarrow\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}-3\text{tg}\alpha=0,\ \text{tg}\alpha\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{1-\text{tg}^2\alpha}-3=0\Rightarrow2-3+3\text{tg}^2\alpha=0\Rightarrow\text{tg}^2\alpha=\frac{1}{3},\ \text{tg}^2\alpha\neq1,\text{ то}$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt3}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}.$$

34 (III). $\text{tg}^2(x+y)+\dfrac{1}{\text{tg}^2(x+y)}\geq2.$ Рівність буде лише за умови, що $\text{tg}^2(x+y)=1.$

$1+2x-x^2=2-(1-2x+x^2)=2-(x-1)^2\leq2.$ Рівність лише при $x=1.$ Отже, $\text{tg}^2(x+y)+\text{ctg}^2(x+y)=1+2x+(-x^2)=1+2x-x^2$ лише тоді, коли обидві частини дорівнюють 2, тобто при

$$\begin{cases}x=1;\\ \text{tg}^2(1+y)=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;\\ y+1=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1;\\ y=-1\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z\end{cases}$$

Розв'язки: $(x,y)=\left(1,\ -1,\ \pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right),\ k\in Z.$

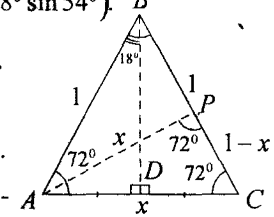
35 (III). $A=125^{100};\ \ \ln A=100\lg5^3=300\lg5=300\lg\frac{10}{2}=300(1-\lg2)\approx$

$$\approx300\left(1-\frac{1}{4}\cdot1{,}20412\right)=300-75\cdot1{,}20412=300-90{,}30900=209{,}691.$$

A має 210 цифр. $A=49$ ...

Перша цифра 4.

36 (III). $\log_{0,5}\sin18^0+\log_{0,5}\sin54^0=\log_{0,5}(\sin18^0\sin54^0).$



Потрібно переконатися, що $\sin18^0\sin54^0=\frac{1}{4}.$ Для цього розглянемо рівнобедрений трикутник.

Бічні сторони $AB=BC=1$, $AC=x$, $\frac{x}{2}=\sin18^0.$ AP – бісектриса кута при вершині A. ΔPAC – рівнобедрений, з кутами при основі 72^0. Тому він подібний до $\Delta ABC\Rightarrow\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|AC|}{|PC|}$; $BP=AP=x$, тоді $PC=1-x$ і

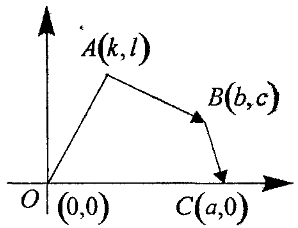
$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt5}{2}.\ \text{Отже, }\sin18^0=\frac{\sqrt5-1}{4}.$$

$$\sin54^0=\cos36^0=1-2\sin^218^0=1-\frac{(\sqrt5-1)^2}{8}=\frac{8-5-1+2\sqrt5}{8}=\frac{\sqrt5+1}{4}\Rightarrow$$

$$\sin18^0\sin54^0=\frac{\sqrt5-1}{4}\cdot\frac{\sqrt5+1}{4}=\frac{5-4}{16}=\frac{1}{4}.$$

Отже, $\log_{0,5}\sin 18^0+\log_{0,5}\sin 54^0=\log_{0,5}\frac{1}{4}=2.$

37 (III). Виберемо систему координат, як вказано на малюнку. Для того, щоб переконатися, що чотирикутник є паралелограмом, потрібно довести, що $\vec{AB}=\vec{OC}\Leftrightarrow\{b-k,c-l\}=\{a,0\}\Rightarrow$



$\Rightarrow\begin{cases}b-k=a;\\ c-l=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-k-a=0;\\ c-l=0.\end{cases}$

За умовою, $\left|\vec{AB}\right|^2+\left|\vec{BC}\right|^2+\left|\vec{OA}\right|^2+\left|\vec{OC}\right|^2=\left|\vec{OB}\right|^2+\left|\vec{AC}\right|^2.$

Запишемо цю умову в координатах:

$$(b-k)^2+(c-l)^2+(a-b)^2+c^2+k^2+l^2+a^2=b^2+c^2+(a-k)^2+l^2.$$

$$b^2-2bk+k^2+c^2-2cl+l^2+a^2-2ab+b^2+c^2+k^2+l^2+a^2=$$

$$=b^2+c^2+a^2-2ak+k^2+l^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+k^2+l^2-2bk-2cl-2ab+2ak=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(b-k-a)^2+(c-l)^2=0.$$

Ця рівність можлива тільки тоді, коли

$$b-k-a=0,$$
$$c-l=0.$$

Отже, чотирикутник з такою властивістю є паралелограм.

38 (III). $x>0;\sqrt{x^2-p}\ge 0;\ \sqrt{x^2-1}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}x^2-p\ge 0;\\ x^2-1\ge 0,\end{cases}\Rightarrow|x|>1\Rightarrow x>1, p>x^2.$

Підносимо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x^2-p+4\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-p}+4(x^2-1)=x^2,$$

$$4\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-p}=p-4x^2+4.$$

Знову підносимо до квадрату:

$$16(x^2-1)(x^2-p)=p^2+16x^4+16-8px^2+8p-32x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^4-16px^2-16x^2+16p=p^2+16x^4+16-8px^2+8p-32x^2.$$

$$x^2(16-8p)=p^2-8p+16\Rightarrow x^2=\frac{p^2-8p+16}{8(2-p)}=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}.$$

Оскільки $x\ge 1$, то $x=\frac{|p-4|}{2\sqrt{2}\sqrt{2-p}}\ (p<2).$

Вияснимо, для яких значень параметра знайдений розв'язок задовільняє рівняння.

$$x^2-1=\frac{p^2-8p+16-16+8p}{8(2-p)}=\frac{p^2}{8(2-p)};$$

$$x^2-p=\frac{p^2-8p+16-16p+8p^2}{8(2-p)}=\frac{(3p-4)^2}{8(2-p)}.$$

Підставимо в рівняння. $\frac{|3p-4|}{2\sqrt{4-2p}}+\frac{2|p|}{2\sqrt{4-2p}}=\frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}};$

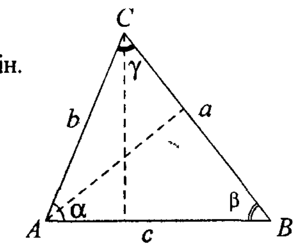
1) $p\le 0,\ 4-3p-2p=4-p\Leftrightarrow p=0.$

2) $0<p\le\frac{4}{3},\ 4-3p+2p=4-p\Leftrightarrow$ при всіх значеннях з цього проміжку.

3) $\frac{4}{3}\le p<2,\ 3p-4+2p=4-p\Leftrightarrow 6p=8\Rightarrow p=\frac{4}{3}.$

Відповідь: Якщо $0\le p\le\frac{4}{3}$, то $x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$. У всіх інших випадках рівняння розв'язків не має.

39 (III). $c=b\cos\alpha+a\cos\beta.$



Аналогічно можна записати для двох інших сторін.

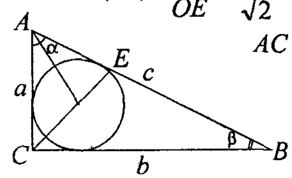
$a=c\cos\beta+b\cos\gamma,$

$b=a\cos\gamma+c\cos\alpha.$

Додамо всі 3 рівності.

$2p=(a+b)\cos\gamma+(a+c)\cos\beta+(b+c)\cos\alpha.$

40 (III). $\frac{CO}{OE}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\ \beta=90^0-\alpha,\ CB=a.$



$AC=a\mathrm{ctg}\alpha;\ AB=\frac{a}{\sin\alpha};\ \frac{AE}{EB}=\frac{AC}{CB}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{CB+AC};$

$$AE=\frac{\frac{a}{\sin\alpha}a\mathrm{ctg}\alpha}{a(1+\mathrm{ctg}\alpha)}=\frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}.$$

AO – бісектриса кута α:

$$\frac{CO}{OE}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{a\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{a\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}.$$

Відповідь: $\alpha=15^0,\ \beta=75^0$ або $\alpha=75^0,\ \beta=15^0.$

41 (III). $m^5n-n^5m=mn(m^4-n^4)=mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)=$

$$=mn\left[(m^4-1)-(n^4-1)\right]=mn\left[(m-1)(m+1)(m^2+1)-(n-1)(n+1)(n^2+1)\right]=$$

$$=mn\left\{(m-1)(m+1)\left[(m^2-4)+5\right]-(n-1)(n+1)\left[(n^2-4)+5\right]\right\}=$$

$$=n(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)+5n(m-1)m(m+1)-$$

$$-m(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)-5m(n-1)n(n+1).$$

У першому і третьому доданках є добутки 5 послідовних натуральних чисел, а в другому і четвертому є добуток 3-х послідовних натуральних чисел.

Переконаємося, що добутки $(m-1)m(m+1)$ і $(n-1)n(n+1)$ ділиться на $3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$. Наприклад, перший добуток ділиться на 3. Нехай $(m-1)\,\vdots\,3$, тоді $m-1 = 3k+1$ (або $(m-1)=3k+2 \Rightarrow m=3k+2,\ m+1=3k+3$), (або $m = 3k+3$, $m+1 = 3k+4 = 3l+1$).

$$\text{Тоді } (m-1)m(m+1)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)\,\vdots\,3$$

$$(\text{або } (m-1)m(m+1)=(3k+2)(3k+3)(3k+1)\,\vdots\,3).$$

Оскільки, серед 3-х послідовних натуральних чисел є хоча б одне парне, то цей добуток ділиться на $3! = 6$. Отже, другий і четвертий доданок діляться на 30.

Аналогічно можна показати, що добутки $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$ і $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ ділиться на $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

Отже, всі доданки правої частини діляться на 30, при будь-яких m і n натуральних.

42 (III). $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1\quad ОДЗ: x\neq3,$

$$\left[\begin{array}{l}|x-3|=1;\\3x^2-10x+3=0,\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=2;\\x=4;\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=3;\\x=\dfrac{1}{3},\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad\left\{2;\ 4;\ \frac{1}{3}\right\}.$$

43 (III). $\sqrt{x-4}=z,\ x-4=z^2\Rightarrow x=z^2+4;$

$$\sqrt{z^2+1-2z}+\sqrt{z^2+4-4z}=1;$$

$$\begin{cases}z\ge2;\\z-1+z-2=1,\end{cases}\quad\begin{cases}z\ge2;\\z=2,\end{cases}\quad z=2;\quad\begin{cases}1\le z<2;\\z-1-z+2=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}1\le z<2;\\1=1,\end{cases}\quad z\in[1,\ 2);\quad\begin{cases}z<1;\\-z+1-z+2=1,\end{cases}\quad\begin{cases}z<1;\\z=1,\end{cases}\quad\varnothing$$

$$z\in[1,\ 2),\ 1\le\sqrt{x-4}\le2,\ 1\le x-4\le4,\ 5<x\le8.$$

$$S=5+6+7+8=26.$$

44 (III). $2x^4\le\sin^4x+\cos^6x-1;\ 2x^4\ge0.$

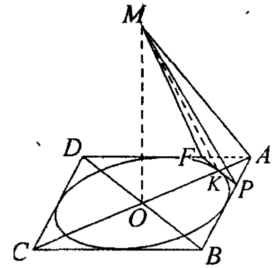
$$\sin^4x-1+\cos^6x=(\sin^2x-1)(\sin^2x+1)+\cos^6x=$$

$$=-\cos^2x(\sin^2x+1)+\cos^6x=\cos^2x(\cos^4x-\sin^2x-1)=$$

$$=\cos^2x((\cos^2x+1)(\cos^2x-1)-\sin^2x)=\cos^2x(-\sin^2x(\cos^2x+1)-\sin^2x)=$$

$$=-\cos^2x\sin^2x(\cos^2x+1+1)=-\sin^2x\cos^2x(\cos^2x+2)\le0.$$

Виконується тільки при $x=0$.



45 (III). Куля буде вписаною в піраміду $MAPF$.

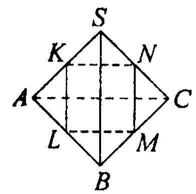
Відомо, що $r=\dfrac{3V}{S}$,

де r – радіус, V – об'єм піраміди, S – поверхня.

$$r=\frac{3V_{MAFP}}{S_{MAFP}},$$

$$r=\frac{3}{16}\,м.$$

46 (III). Неважко довести, що площина перерізу паралельна двом ребрам піраміди, які вона не перетинає.



$KN\|AC\|LM,\ KL\|SB\|MN.$

Звідси, $\dfrac{KL}{SB}=\dfrac{AL}{AB}=1-\dfrac{LB}{AB}=1-\dfrac{LM}{AC}.$

$$KL=LM=b,\ AC=a,$$

$$\frac{b}{SB}=1-\frac{b}{a},\ SB=\frac{ab}{a-b},\ V=\frac{a^3}{12(a-b)}\sqrt{3b^2-(a-b)}.$$

47 (III). $u_0u_2=ku_1,\ u_2=ku_1,\ u_1u_2=ku_1^2>0$, звідси $u_1\neq0,\ k>0,\ u_{n+1}=k\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ для всіх натуральних n. $u_0=1,\ u_1=u_1,\ u_2=ku_1,\ u_3=k^2,\ u_4=\dfrac{k^2}{u_1},\ u_5=\dfrac{k}{u_1}.$

Бачимо, що послідовність періодична з періодом 6, тобто $u_{n+6}=u_n$, для всіх n. $1995=332\cdot6+3$, тому $u_{1995}=u_3$, $k^2=100$, $k=10$.

48 (III). Так, існує. Наприклад, $p(x)=x^2+1995^2$,

$p'(x)=2x,\ x^2+1995^2-1995\cdot2x=(x-1995)^2\ge0.$

49 (III). $f(f(0))+f(0)=3$, звідси $f(0)\le3$. Розглянемо випадки:

1. $f(0)=0$. Тоді $f(f(0))+f(0)=0\neq3$, це неможливо.

2. $f(0)=1$. За індукцією доводиться, що $f(n-1)=n$ для всіх натуральних n: якщо $f(k-1)=k$, то $f(f(k-1))+f(k-1)=2k+1$, $f(k)+k=2k+1$, $f(k)=k+1$.

3. $f(0)=2$. Тоді $f(f(0))+f(0)=f(2)+2=3$, звідси $f(2)=1$.

$f(f(2))+f(2)=f(1)+1=2\cdot2+3$, звідси $f(1)=6$.

$f(f(1))+f(1)=f(6)+6=2\cdot1+3$, звідси $f(6)=-1$, а це неможливо.

4. $f(0)=3$. Тоді $f(f(0))+f(0)=f(3)+3=3$, звідки $f(3)=0$.

$f(f(3))+f(3)=f(0)+3=6\neq2\cdot3+3$, це теж неможливо.

Відповідь: $f(n)=n+1$, $f(1995)=1996$.

50 (III). а) Для деякого маршруту $A_1A_2A_3$ та іншої зупинки S легко отримати, що через пари (S, A_1), (S, A_2) та (S, A_3) проходить по одному окремому маршруту. Тобто через S проходить рівно три маршрути. Аналогічні міркування із зупинкою A_i, $i = 1, 2, 3$, та маршрутом через S показують, що через кожну з A_i проходить рівно три маршрути (один з них $A_1A_2A_3$).

Відповідь: $3\cdot 2+1=7$ маршрутів.

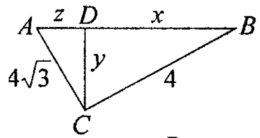
б) Якщо $A_1A_2 \dots A_n$ – деякий маршрут і S – ще деяка зупинка, то через S проходить n маршрутів (див. а)).

Візьмемо ще один маршрут $B_1B_2 \dots B_k$ і точку S зовні цих двох маршрутів. Тоді маршрути з S мають рівно по одній спільній точці з $A_1A_2 \dots A_n$ та $B_1B_2 \dots B_k$, звідки $n = k$. Всі маршрути мають одну і ту саму кількість зупинок, і всього зупинок $n(n-1) + 1 = 13$.

Відповідь: на кожному маршруті $n = 4$ зупинки.

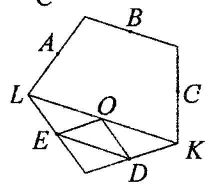
51 (III).
$$S=pr,\ S=\frac{abc}{4R};\ \ \frac{abc}{4R}=pr;\ abc=4Rpr;$$
$$p=\frac{3}{2}b;\ abc=4R\frac{3}{2}br;\ ac=6Rr.$$

53 (III). Нехай x і y – катети прямокутного трикутника з гіпотенузою $CB=4$. Тоді побудуємо інший трикутник з катетами y і z та гіпотенузою $4\sqrt{3}$. З умови, що $y^2=xz$, випливає, що ΔABC – прямокутний.



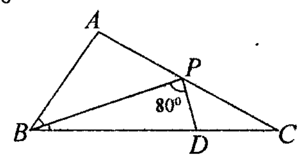
Тоді $\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yz=\frac{1}{2}4\cdot 4\sqrt{3}$, $xy+yz=16\sqrt{3}$.

54 (III). Побудуємо паралелограм у точках A, B, C як вершинах. Точка O буде серединою діагоналі LK. Розглянемо ΔEOD. Через точку O проведемо пряму, паралельну ED, і відкладемо OL і OK, що рівні ED. Далі все ясно.



55 (III). Потрібно поділити квадрат на 50 рівних прямокутних смужок. Тоді хоча б в одну смужку попадуть принаймі три точки, які й утворюють трикутник, площа якого менша або дорівнює $\frac{1}{100}$.

57 (III). Відмітимо на BC точку D так, щоб $BP = BD$. Легко порахувати, що $\angle APB=60^0$, $\angle BPD=80^0$, тому $\angle DPC=\angle DCP=40^0$ і $PD = DC$. Чотирикутник $APDB$ вписаний, бо $\angle ABD + \angle APD=180^0$. З $\angle ABP=\angle DBP$ випливає: $AP = PD$, бо рівні кути спираються на рівні хорди. Звідси $AP+PB=DC+BD=BC$.



62 (III).
$$\left|x-y+\frac{1}{4}\right|\le\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x-y+\frac{1}{4}\right)^2\le x\Leftrightarrow\left(x-y+\frac{1}{4}\right)^2\le y\Leftrightarrow\left|x-y+\frac{1}{4}\right|\le\sqrt{y}.$$

63 (III). Маємо $(3\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x)^2+5(1+\sin 3x)+(1-\cos 12x)=0$, звідки
$$3\mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}x,\ \ \sin 3x=-1,\ \ \cos 12x=1.$$

Відповідь: $2\pi n-\frac{\pi}{6}$, $2\pi n-\frac{5\pi}{6}$, $n\in Z$.

64 (III). Нехай $MC\cap AK=F$.

Для площ маємо $S(CMD)=S(AKD)\Rightarrow S(CFK)=S(AFM)\Rightarrow$
$$\Rightarrow S(CKA)=S(CMA)\Rightarrow MK\parallel AC\Rightarrow S(CKA)=S(CPA)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S(ABCK)=S(ABCP)\Rightarrow S(ABCP)=S(ABCD)/2.$$

65 (III). Нехай $f(1)=a$. Для всіх $x\ne 0$ $f(x)-a=af(x)-af(1/x)$. Якщо $a=1$, то $f(t)=1$ для всіх $t\ne 0$, що суперечить умові. Підставляючи в останнє рівняння $1/x$ в якості x, маємо $f(1/x)-a=af(1/x)-af(x)$. З двох рівностей легко знаходимо, що $f(x)(1-2a)=a(1-2a)$. Якщо $a\ne\frac{1}{2}$, то для всіх $x\ne 0$ $f(x)=a$, що суперечить умові.

Відповідь $f(1)=\frac{1}{2}$.

66 (III). Доведемо відповідне твердження для прямокутників, розміром $2^m\times 1998^2$, $m\ge 0$, індукцією по m. Для $m=0$ твердження очевидне.

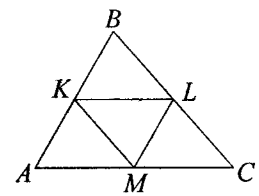
Припустімо, що твердження є вірним при $m=k$. Нехай $m=k+1$. Проведемо уявну пряму l, яка розбиває прямокутник P_{k+1} розміром $2^{k+1}\times 1998^2$ на два прямокутники розміром $2^k\times 1998^2$. Розглянемо спочатку всі розбивання прямокутника P_{k+1}, які містять принаймні одну фігурку, що розгинається прямою l. Сукупність всіх таких розбивань розпадається на пари неспівпадаючих розбивань, котрі взаємно симетричні відносно прямої l, і містять парну кількість N розбивань.

Усі інші розбивання прямокутника P_{k+1} породжують відповідні розбивання двох прямокутників розміром $2^k\times 1998^2$. За припущенням індукції, кожний з цих прямокутників розбивається непарним числом способів, яке позначимо через L. Таким чином, кількість способів розбивання прямокутника P_{k+1} дорівнює L^2+N, і є числом непарним.

67 (IV). Існує. Візьмемо на площині $\frac{1990}{2}=995$ пар взаємно перпендикулярних векторів і один вектор, перпендикулярний до цієї площини. Неважко впевнитися, що такий набір векторів задовільняє умову задачі.

68 (IV). Нехай $KB=xAB$, $AK=yAB$.(1). Тоді з подібності трикутників KBL і ABC, AKM і ABC одержимо: $S_{KBL}=x^2S_0$, $S_{AKM}=y^2S_0$.

Оскільки $KLCM$ – паралелограм, то $S_{KLM}=S_{LMC}$.



Тепер можна записати, що $S_{KLM}=\frac{1}{2}S_{MKLC}=$
$$=\frac{1}{2}\left(S_{ABC}-S_{KBL}-S_{AKM}\right)=\frac{S_0}{2}\left(1-x^2-y^2\right).$$

З рівності (1) випливає, що $x+y=1$.

Звідси $S_{KLM}=S_0\left(x-x^2\right)=S_0\left(-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$.

Отже, найбільшого значення S_{KLM} набуває тоді, коли $x=\frac{1}{2}$, і це значення дорівнює $S_{KLM}=\frac{1}{4}S_0$. Точка K – середина сторони.

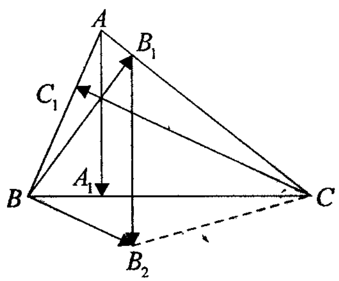
69 (IV). Нехай a – найменше серед усіх записаних чисел, a, b і c – сусідні з ними числа. Тоді, за умовою задачі, $a=\sqrt{bc}$ або $a=\dfrac{b+c}{2}$. Оскільки, за припущенням, $b\ge a$ і $c\ge a$, то звідси випливає, що $a=b=c$. Аналогічними міркуваннями впевнюємося, що й сусідні b і c дорівнюють a і т. д. Отже, всі записані числа рівні між собою і дорівнюють 26.

70 (IV). Додаючи почленно очевидні нерівності:

$$\frac{a^2}{a-b}\ge\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b \text{ і } \frac{b^2}{b-c}\ge\frac{b^2-c^2}{b-c}=b+c,$$

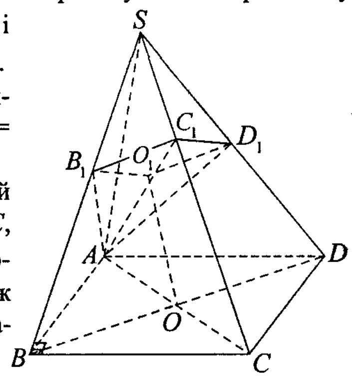
враховуючи, що принаймні одна з цих нерівностей є строгою, ми одержимо

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$



71 (IV). Нехай $\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{AA_1}$. Тоді $\overrightarrow{BB_2}=$ $=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{CC_1}$. Звідси випливає, що BC_1CB_2 – паралелограм. Оскільки $\overrightarrow{CC_1}\perp\overrightarrow{BC_1}$, то BC_1CB_2 – прямокутник, а отже, $\angle BB_2C=90^0$. Але $\angle BB_1C=90^0$, тому точки B_1 і B_2 лежать на колі, побудованому на BC як на діаметрі. Оскільки $BB_1\perp BC$, то точки B_1 і B_2 – симетричні відносно BC, а тому $BB_1=BB_2=$ $=CC_1$. Аналогічно доведемо, що $BB_1=AA_1$. Оскільки висоти AA_1, BB_1, CC_1 рівні між собою, то трикутник рівносторонній.

72 (IV). Оскільки $CB\perp AB$ і AB – проекція SB на площину основи, то, за теоремою про три перпендикуляри, $SB\perp BC$. Тому $CB\perp(SAB)$ і $(SBC)\perp(SAB)$. За умовою, $SC\perp(AB_1C_1D_1)$, тому $(SBC)\perp(AB_1C_1D_1)$. Якщо дві площини перпендикулярні до третьої площини, то лінія їх перетину також перпендикулярна до цієї площини. Тому $AB_1\perp(SBC)$ і $\angle C_1B_1A_1=90^0$. Аналогічно, $\angle C_1D_1A=90^0$. Отже, O_1 – середина AC_1 – є центром кола, описаного навколо $AB_1C_1D_1$, тобто $O_1A=O_1B_1=$ $=O_1C_1=O_1D_1$.



Нехай O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Тоді O – середина AC, і тому $OO_1\|SC$. Звідси, $OO_1\perp(AB_1C_1D_1)$. Тому $OA=OB_1=OC_1=OD_1$. Оскільки також $OA=OB=OC=OD$, O – центр сфери, описаної навколо цього многогранника.

89 (IV). Перейшовши до половинних кутів, отримаємо:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)^2=\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{y}{2}-\sin^2\frac{y}{2}\right);$$

для $x,y\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\ne0$, $\cos\dfrac{y}{2}-\sin\dfrac{y}{2}\ne0$. Тому

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{y}{2}\right)=\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\right),\text{ звідки}$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2};\ x=y.$$

90 (IV). Нехай $1996m+1=a^2$, $1996n+1=b^2$, $mn+1=c^2$ (*).

Оскільки $m=\dfrac{a^2-1}{1996}=\dfrac{(a-1)(a+1)}{4\cdot499}$, то числа $a-1$ і $a+1$ – парні й одне з них ділиться на 499: звідси $a\pm1=2\cdot499p$ і $m=p(499p\pm1)$. Аналогічно $n=q(499q\pm1)$ (**). Тепер остання з рівностей (*) набуває вигляду

$$p(499p\pm1)\cdot q(499q\pm1)=(c-1)(c+1).$$

Множники лівої частини згрупуємо по 2 таким чином:

$$p(499q\pm1)=499pq\pm p,\ q(499p\pm1)=499pq\pm q.$$

Отже, якщо в (**) вибрати однакові знаки, а p і q задовільняють умови $|p-q|=2$, то m і n задовільнятимуть умову задачі.

При цьому $c=499pq\pm\dfrac{p+q}{2}$.

91 (IV). а) Якщо $a_1>1$, (a_n) – монотонно зростає, але $n=1$, це вірно, а далі індукція. $a_{k+1}=2a_1a_k-a_{k-1}>2a_k-a_{k-1}=a_k+(a_k-a_{k-1})>a_k$.

Якщо ж $a_1<-1$, то послідовність $b_n=(-1)^na_n$ також задовільняє рекурентне співвідношення із задачі.

$b_{k+1}=(-1)^{k+1}a_{k+1}=(-1)^{k+1}(2a_1a_n-a_{k-1})=2(-1)a_1(-1)^ka_k-(-1)^{k-1}a_{k-1}=$ $=2b_1b_k-b_{k-1}$, і все зводиться до попереднього випадку. В обох випадках $|a_{499}|>1$, що суперечить умові.

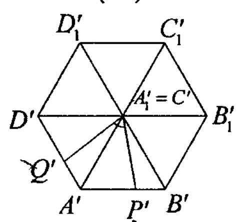
б) Оскільки $|a_1|<1$, то покладемо $a_1=\cos\alpha$. Тоді, за індукцією доводиться, що $a_n=\cos n\alpha$.

$$a_{n+1}=2a_1a_n-a_{n-1}=2\cos\alpha\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha=$$
$$=\cos\alpha\cos n\alpha-\sin\alpha\sin n\alpha=\cos(n+1)\alpha.$$

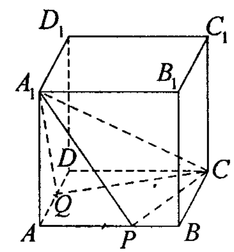
За умовою, $\cos499\alpha=0$.

Тому $a_{1996}=\cos1996\alpha=2\cos^2998\alpha-1=2(2\cos^2449\alpha-1)^2-1=1.$

92 (IV). Оскільки $AP=DQ$, то $AP:PB=DQ:QA$.



Розглянемо ортогональну проекцію куба на площину, перпендикулярну діагоналі A_1C_1. Тоді кут $Q'C'P'$ буде шуканим.



Ортогональна проекція зберігає відношення відрізків прямої, тому

$A'P' : P'B' = D'Q' : Q'A'$ і $Q'A' = P'B'$.

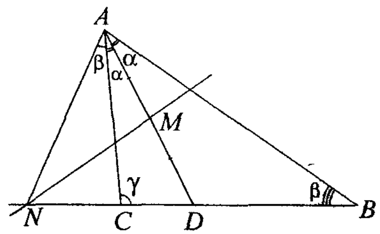
Але тоді $\Delta Q'C'A' = \Delta P'C'B'$, $\angle Q'C'A' = \angle P'C'B'$.

$$\angle Q'C'P' = \angle A'C'B' - \angle P'C'B' + \angle Q'C'A' = 60^0 - \angle P'C'B' + \angle P'C'B' = 60^0.$$

93 (IV). Для $x \ge \frac{\pi}{2}$ нерівність очевидна. Якщо ж $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, використовуючи послідовно нерівності $\operatorname{tg} x > x$ і $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, отримуємо:

$$\frac{\sin x}{x} + x^2 > \cos x + x^2 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + x^2 > 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 > 1.$$

94 (IV). Позначимо $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тоді $\angle ADN = \alpha + \beta$ як зовнішній кут ΔABD. ΔADN – рівнобедрений, тому $\angle NAC = \beta$. За рівністю кутів $\Delta NAC \sim \Delta NAB$. Отже, $\frac{NC}{NA} = \frac{NA}{NB}$, звідки $NA^2 = NC \cdot NB$. Тому NA дорівнює довжині дотичної, проведеної з N до кола, описаного навколо ΔABC. Оскільки точка A лежить на цьому самому колі, то NA – дотична.



95 (IV). а) Нехай $f(x)$ – періодична з періодом $T > 0$.

Тоді для довільного цілого k:

$$4kT((kT)^2 - 1) = (kT - 1)f(kT + 1) - (kT + 1)f(kT - 1) =$$
$$= (kT - 1)f(1) - (kT + 1)f(-1) = kT(f(1) - f(-1)) - (f(1) + f(-1)).$$

Зліва – кубічний многочлен від k, а справа – лінійний, що неможливо.

б) Легко зрозуміти, що степінь $f(x)$ має бути ≥ 3. Підставляючи в співвідношення $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, після очевидних викладок отримуємо: $a = c = 0$, b – довільний. Отже, кожний многочлен вигляду $f(x) = x^3 + bx$ задовільняє умову.

в) Якщо $x \ne \pm 1$, то умову можна переписати так:

$$\frac{f(x+1)}{x+1} - \frac{f(x-1)}{x-1} = 4x = (x+1)^2 - (x-1)^2,$$

звідки $\frac{f(x+1)}{x+1} - (x+1)^2 = \frac{f(x-1)}{x-1} - (x-1)^2$. Тоді для функції $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2$, маємо: $g(x + 1) = g(x - 1)$, тобто $g(x)$ – періодична з періодом 2 (за винятком, можливо, точок $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$). Але тоді $f(x) = x^3 + xg(x)$. З іншого боку, проста перевірка показує, що для кожної періодичної з періодом 2 функції $g(x)$ функція $f(x) = x^3 + xg(x)$ задовільняє умову. Але у випадку $g(x) \equiv 0$, $f(x)$ не буде многочленом.

96 (IV). Якщо $2n$ – цифровому числу $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}$ зіставити у відповідність n – цифрове число $\overline{b_1 b_2 \ldots b_n}$, k-та цифра b_k якого визначається за парою цифр a_k, a_{2k} за правилом $11 \to 1$, $22 \to 2$, $21 \to 3$, $12 \to 4$, то це відображення буде взаємно однозначною відповідністю між числами першого виду і числами другого виду.